

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті
Математика және математикалық модельдеу институты

ӘОЖ 517.956.3

Қолжазба құқығында

ҚАЙЫРБЕК ЖАЛҒАС АСҚАРУЛЫ

Акустикалық диагностиканың математикалық моделдері

8D06104 – Математикалық және компьютерлік модельдеу

Философия докторы (PhD) дәрежесін
алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші
физика-математика ғылымдарының докторы,
Профессор Кангужин Б.Е.

Шетелдік ғылыми кеңесші
PhD, профессор Массимо Л.К. (Падуа, Италия)

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2023

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ	3
1. Акустикалық диагностика бойынша стержень ұштарының бірін диагностикалау	6
1.1. Стерженьдердің көлденең тербелістерінің теориясының болжамдары мен негізгі моделдері	7
1.2. Ақаудың пайда болуы мен дамуының сценаріі	10
1.3. Ақауларға сәйкес дифференциалдық операторлар және олардың меншікті мәндері туралы	14
1.4. Көлденең жүктеменің әсерінен құбырдың статикалық ауытқуының дифференциалдық теңдеуі	14
1.4.1. Серпімді құбырдың көлденең иілу тербелістері	16
1.4.2. Құбыр ұштарын бекітудің жағдайларына арналған шешімдер	17
1.5. Стерженьнің ұшының бекітуінің идентификациясы	20
1.5.1. Кері есепті қою	20
1.5.2. Кері есепті шешудің жалғыздығы	22
1.5.3. Биортогональды жүйе әдісі және жақсы анықталған матрица әдісі	24
1.5.4. Анықталмаған жүйе	25
1.5.5. Анықталмаған жүйе әдісімен есепті шешудің мысалдары	27
1.6. Стерженьді бекітудің түрі мен параметрлерін анықтау	29
1.6.1. Кері есепті қою	29
1.6.2. Шешімнің екі жақтылығы туралы теорема	30
1.6.3. Шешу әдісі	34
1.6.4. Шешімнің орнықтылығы	34
1.7. Жалпы шекаралық шарттардың идентификациясы	35
1.8. Оператордың меншікті мәндері арқылы шекаралық шарттарын бірмәнді қалыпқа келтіру	49
2. Граф бойындағы тербелістер идентификациясы	51
2.1. Кері есепті қою	51
2.2. Жұлдыз– граф бойымен толқындардың таралуы	54
2.3. Жұлдыз–графтағы Штурм–Лиувилль операторының анықталу облысының идентификациясы	60
2.3.1. Граф–жұлдыздағы Штурм–Лиувилль теңдеуі үшін Коши есебінің шешімі	61
2.3.2. Шеттік шарт жиыны бойынша бтортогональ жүйенің шешімін құру	63
2.3.3. Интегралдық түрдегі шекаралық формалардың эквивалент жиыны	64
2.3.4. Эталондық есепті таңдау және кері есепті анықтап қою	66
2.3.5. Шекаралық функцияларды қалпына келтіруге арналған теорема	67
2.3.6. Шеттік есептер жағдайында бірегейлік теоремасын нақтылау	69
ҚОРЫТЫНДЫ	72
ҚОСЫМШАЛАР	73
ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ	80

КІРІСПЕ

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Қазіргі уақытта акустикалық диагностика әдістерінің болашағы мен басымдылығы ие екені күмән тудырмайды. Осы тақыптағы мақалаларға шолу жасай келе акустикалық диагностика газ құбырларын, мұнай құбырларын және көптеген құрылымдарды диагностика жасағанда кеңінен қолданылады. Акустикалық диагностика әдістері әртүрлі материалдардың беріктігін, пайда болып жатқан сызаттардың орналасуын, пайда болып және дамып жатқан жарықшақтарды анықтауда кеңінен пайдаланылады. Акустикалық диагностика әдісі әсіресе қызатын, суытатын агрессивті ортада құрылымның техникалық ахуалын анықтау үшін, әртүрлі заттардың ақау пайда болған жағдайында өнімсіз шығындарды анықтау үшін қолданылады. Осы диссертациялық жұмыста өзара байланысқан стерженьдер немесе құбырлардың бірігуінен жасалған конструкциялар зерттеледі. Осындай конструкцияларда қолданыс кезінде жарықшақ, сызат тағы сол сияқты көптеген ақаулар пайда болуы мүмкін. Осындай конструкцияларда сызаттар мен жарықшақтарды дер кезінде анықтау үшін акустикалық диагностика әдісі қолданылады. Акустикалық диагностика әдістері сол конструкцияның өзін бүтіндей (без демонтажа) зерттеуге мүмкіндік береді. Қолданыс кезінде конструкциялардан “шулар” естіледі. Дыбыс диапазонына сәйкес осы “шулардың” жиіліктерін қажетті өлшеуіш құралдар арқылы өлшей аламыз. Осы өлшеуіш құралдардың ақпары бойынша қолданыстағы конструкцияға диагностика жасалады. Материалдарды деформация жасау кезінде пайда болған шуларға алғаш Д.Крейзер систематикалық зерттеулер жүргізген. Көптеген материалдарда деформация кезінде шулар төменгі кернеулерден бастап кездесетінін электронды акустикалық аппарат арқысында Д.Крейзер байқады. Шынында, біздің көбіміз уақыт өте келе үйдегі тоңазытқышта өзге шулар пайда болатынын байқаймыз. Бұл шулар тоңазытқышта қолданылатын құбыр жүйесінде пайда болады. [1] жұмыста кемелердегі механизмдердің сызатын анықтау есептері қарастырылған. Автотрактор двигателіндегі дәл осындай сызаттарды анықтау есептері [2,3] жұмыстарда қарастырылған. [4,5,6] жұмыстарда механизмдердің акустикалық диагностика есептері шешілген. [7] жұмыста “Барабан үні арқылы оның формасын біле аламыз ба?” деген сұрақ қойылған. Ал [8] жұмыста меншікті жиілітер қозғалысы арқылы объект көлемі мен оның орналасу жағдайын анықтау зерттелінді. [9] мақалада акустикалық сигналдар анализі туралы айтылған. [10,11] жұмыстарда құбыр мен құбырлар жүйесінің кіріс пен шығыс жерлеріндегі шарттар зерттелген. Ал [12-13] жұмыстарда объектілердің акустикалық ауытқуы бойынша идентификациялау есептері зерттелінген. А.М.Ахтямов “Шеттік шарттардың идентификация теориясы және оның қолданыстары” монографиясының жоғарыда көрсетілген жұмыстардан өзгешелігі монографияда облыс формасы, объект көлемі немесе орналасу жағдайының орнына бекітулерде пайда болатын ақаулар зерттеледі. Бұл жұмыста тербеліс жиілігінің қажетті диапазонын қамтамсыз ететін бекіту

түрлерін іздеу қарастырылады. Мұндай есептерде жоғарыда қойылған математикалық акустика есептеріне жатады. Ол кезде де меншікті жиілік бойынша бекіту күйін сипаттайтын параметрлерін идентификация жасауды қажет етеді. Осы жұмыста қарастырылған есептерді шеттік кері есеп деп те қарастырсақ болады.

Осы жұмыста өзара байланысқан стерженьдер мен құбырлардан құралған конструкцияның бекіту түрлеріне диагностика жасау қарастырылған. Бұл жұмыста конструкцияның жеке бөлшектерінің тербеліс жиілігіне қарай бекіту түрлері анықталды. Бұл диссертациялық жұмыста бірқатар математикалық нәтижелер алынған. Олардың көбі стерженьдердің немесе құбырдың шеттік бекітулерінде ақау қалай басталады және одан кейін олар ары қарай қандай сценариимен дамидыны ұсынылған. Ұсынылған сценарииге байланысты стерженьнің шеттік бекітуінің күйін анықтауға математикалық модельдер көрсетілген және одан кейін олар мұқият зерттелген.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты. Диссертациялық жұмыста стерженьдерден немесе құбырлардан тұратын құрылғылардың техникалық күйлерін анықтау мәселелері көзделген. Дәлірек айтқанда, стерженьдердің немесе құбырлардың шеттік бекітулерінің күйлерін тербеліс жиіліктері арқылы диагностикалау. Қойылған мақсатқа жету үшін келесі есептер мен сұрақтарды зерттеуге тура келеді:

1. Бекітуде қалай ақау пайда бола бастайды және одан кейін ол қандай сценариимен дамиды.

2. Аталған сценарииден туындайтын математикалық есептерді зерттеу.

3. Математикалық зерттеулердің нәтижелері бойынша практикалық ұсыныстар жасау.

Диссертацияны қорғауға ұсынылатын негізгі жетістіктер:

1. Стерженьдер мен құбырлар тұратын құрылғылардың бекітулерінде ақаудың қалай пайда бола бастайтыны мен одан кейін қандай сценариимен дамидынын ұсындым.

2. Жоғарыда аталған сценарииден туындайтын математикалық есептерді зерттедім.

3. Математикалық зерттеулердің нәтижелері бойынша практикалық ұсыныстар жасадым.

Зерттеу нысаны – стерженьдер немесе құбырлар жүйесінен құралған конструкциялардың меншікті жиілігі мен меншікті мәндері бойынша бекіту шарттарын табу үшін қойылған есептер.

Зерттеу әдістері. Бұл диссертациялық жұмыста дифференциалдық теңдеу мен математикалық физика теңдеулері теориясы пайдаланылды. Олардың есептеулері кезінде алгебра элементтері пайдаланылды. Нақты нәтижелерді алу үшін Maple бағдарламалық пакеті қолданылды.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы. Бұл жұмыста стерженьдер мен құбырлар жүйесінен құралған конструкцияның меншікті жиілігі мен меншікті мәні бойынша бекіту шарттарын анықтау есебі қарастырылған. Бұл жұмыстың өзге жұмыстардан өзгешелігі меншікті жиіліктер мен меншікті мәндер бойынша

мүмкін бекітудің барлық жағдайы қарастырылған. Осы мүмкін барлық жағдай бойынша бекіту түрлеріне диагностика жасау есебінің шешу жолы анықталған.

Зерттеудің тәжірибелік және теориялық маңызы. Диссертациялық жұмыстың теориялық және практикалық маңызы бар. Диссертациялық жұмыстың нәтижелерін нақты өмірде кездесетін құрылыс объектілері мен техникалық құрал жабдықтардың қол жетімсіз тұстағы бөлшектеріне түскен сызаттар мен жарықшақтарды алдын-ала білуге мүмкіндік береді.

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 5 мақала жарияланды. Осы мақалалардың ішінде 2 мақала Web of Science пен Scopus базаларының деректер қорына кіретін басылымдарда жарияланды. Нақты атап айтқанда “Identification of the Domain of the Sturm–Liouville Operator on a Star Graph” мақаласы “Symmetry” (Q2) журналында, ал “On the Uniqueness of the Recovery of the Domain of the Perturbed Laplace Operator” мақаласы “Lobachevskii Journal of Mathematics” (Q3) журналында жарияланды. Ал 3 мақала Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Білім және ғылым саласында сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынатын ғылыми басылымдарда жарияланды.

Диссертациялық жұмыстың құрылымы мен сипаттамасы. Осы диссертациялық жұмыс кіріспеден 2 тараудан және қорытындыдан тұрады. Кіріспе бөлімде диссертациялық жұмыстың өзектілігі, мақсаты, диссертациялық жұмыс негізінде алынған нәтижелер, ғылыми жаңалығы, зерттеу нысаны, зерттеу әдістері, диссертациялық жұмыстың басқа жұмыстармен байланыс, автордың үлесі, диссертациялық жұмыстың талқылануы, жарияланымдар жазылған. Ал тарауларда диссертациядағы қойылған есептің есептеу жолдары мен диссертациялық жұмыстың жаңашылдығы жазылған. Қорытындыда диссертациялық жұмыстың нәтижесінде алынған негізгі нәтижелер мен қорытындылар жазылған.

1. Акустикалық диагностика бойынша стержень ұштарының бірін диагностикалау

Акустикалық диагностикасы дегеніміз ол тербелмелі процестердің параметрлері бойынша жабдықтың жұмыс істеп тұрған жағдайындағы техникалық жағдайын анықтау.

Техникалық диагностиканың мақсаты тек машина ақауларының себептерін анықтау ғана емес, сонымен қатар зақымдануды уақытында анықтау және олардың даму сипатын қадағалау арқылы ақаулардың алдын алу және жөндеуге дейінгі жабдықтың күйінің өзгерісін болжау болып табылады.

Виброакустикалық диагностика – жанама белгілер бойынша техникалық жағдай параметрлерінің нормадан ауытқу дәрежесін бағалау, атап айтқанда, құрамдас бөліктер мен бөлшектердің өзара әрекетінің сипатынан тәуелді болатын акустикалық және тербелмелі процестердің қасиеттерінің өзгерісі арқылы анықтау.

Жұмыс істеп тұрған машинадағы ақауды анықтау үшін жұмыс жағдайында қарастырылған режимдердің диагностикасының тербеліс процесіне негізделген ақпаратты пайдалану керек. Динамикалық жүйеден өткен және одан түрленген вибросигналдар бөлшектің жағдайын анықтауға қолданылады, бұл ақпараттың жанамалығы болады. Ақпараттың толық болмауы барлық қажетті ақпаратты алу мүмкіндігінің шектеулілігіне байланысты, ал ақпараттың анықталмағандығы – кедергілер әсері мен диагностикалау сипатының есебін дәл қойылмауы. Қойылған мәселелерді шешудің негізгі тәсілі келесідей. Динамикалық жүйедегі тербелістің математикалық моделін алдыңғы жиналған тәжірибелер мен эксперименттік зерттеулер арқылы сипаттау. Осының негізінде барлық жұмыс істейтін жабдықтың жағдайы сипатталады [14].

Модель дегеніміз–зерттеліп отырған объектінің кейбір кейбір маңызды қасиеттерін сақтай отырып кейін оның оригинал түріне көшетін материалдық объектіні зерттеу болып табылады. Зерттелетін әрбір процесті әртүрлі модельдермен сипаттауға болады және ешбір модель мұны толық және жан-жақты сипаттай алмайды. Дегенмен, зерттелетін объектінің ерекшеліктерін көрсететін модельді пайдалану себептер мен салдарлардың, кірістер мен шығыстардың арасындағы байланысты неғұрлым анық көруге, қажетті қорытындыларды тезірек жасауға және дұрыс шешім қабылдауға мүмкіндік береді. Диссертациялық жұмыста модельдің бастапқы теңдеулерін аналитикалық шешу нәтижесінде аналитикалық модельдер қолданылады. Атап айтқанда, зерттелетін объектілер мен құбылыстардың математикалық сипаттамасы алынды, өйткені бұл принцип физика мен техниканың көптеген салаларында бұрыннан қалыптасқан. Жұмыста модельдеу объектісін бақылау негізінде гипотеза ретінде қабылданған болжамдардың ең аз санын пайдаланатын логикалық негізделген модельдеу– ғылыми модельдеу кеңінен қолданылады [15].

1.1. Стерженьдердің көлденең тербелістерінің теориясының болжамдары мен негізгі моделдері

Стерженьның көлденең тербелістерінің болжамды теңдеуі

$$L(\omega) = \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x)\frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial t^2} \right) = f(x,t), \quad (1.1.1)$$

$$-\frac{l}{2} \leq x \leq +\frac{l}{2}, \quad t \geq 0$$

түрінде сипатталады. Осыған сәйкес біртекті теңдеу

$$L(\omega) = 0 \quad (1.1.2)$$

теңдеуімен сипатталады.

Жоғарыдағы белгілеулердің физикалық мағыналары:

$\rho(x)$ – материал тығыздығы;

$A(x)$ – көлденең қиманың ауданы;

$\omega(x,t)$ – көлденең орын ауыстыру;

$E(x)$ – Юнг модулі;

$I(x)$ – нейтраль оске қатысты көлденең қиманың ауданының инерция моменті;

$f(x,t)$ – көлденең жүктеме.

Физикалық тұрғыдан қарағанда $\omega(x,t)$ – көлденең орын ауыстыру x және t бойынша үзіліссіз дифференциалданады. $\left[-\frac{l}{2}, +\frac{l}{2}\right]$ интервалында ρ, A, E, I функциялары x айнымалысы бойынша бірқалыпты шектелген, жатық, оң функциялар болады. Материалдың біртектілігі туралы қосымша болжам, ρ, E тұрақты дегенді білдіреді ($A(x)$ пен $I(x)$ өзектің ұзындығы бойымен өзгеруі мүмкін). Гук заңы оырнды деп санайық, ал деформация энергиясы өзектің қосымша энергиясына тең деп алайық.

Ары қарай (1.1.1) теңдеудің әлсіз шешімдерінің классын қарастырайық, және олар келесі шарттарды қанағаттандырсын:

(а) $\omega(x,t)$ – x және t бойынша $\Omega = \left[-\frac{l}{2}, +\frac{l}{2}\right] \times [0, T]$ облысында үзіліссіз дифференциалданады (яғни $\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t}$ және $\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial x}$ Ω облысында x және t бойынша үзіліссіз функциялар);

(б) $\sqrt{\rho(x)A(x)}\left(\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t}\right)$ және $\sqrt{E(x)I(x)}\left(\frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial x^2}\right)$ функциялары x бойынша $\left[-\frac{l}{2}, +\frac{l}{2}\right]$ интервалында квадратымен интегралданатын функциялар, ал энергия функциялары

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \rho(x)A(x) \left[\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx, \quad (1.1.3)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} E(x) I(x) \left[\frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx, \quad (1.1.4)$$

t бойынша үзіліссіз, $[0, T]$ интервалында бірқалыпты шектелген функциялар;

(с) $\omega(x, t)$ ол $x = -\frac{l}{2}$, $x = +\frac{l}{2}$ шекаралық нүктелерде төменде көрсетілген үш шарттың біреуін қанағаттандырады:

$$\begin{aligned} \omega\left(\pm \frac{l}{2}, t\right) &= 0, \\ \frac{\partial \omega\left(\pm \frac{l}{2}, t\right)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

$$\begin{aligned} \omega\left(\pm \frac{l}{2}, t\right) &= 0, \\ EI \frac{\partial^2 \omega\left(\pm \frac{l}{2}, t\right)}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^2 \omega\left(\pm \frac{l}{2}, t\right)}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 \omega\left(\pm \frac{l}{2}, t\right)}{\partial x^2} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

(d) $\omega(x, t)$ келесі берілген бастапқы шарттарды қанағаттандырады

$$\omega(x, 0) = \psi(x), \quad (1.1.8)$$

$$\frac{\partial \omega(x, 0)}{\partial t} = \eta(x), \quad (1.1.9)$$

мұндағы $\psi(x), \eta(x) \in C^1 \left[-\frac{l}{2}; +\frac{l}{2} \right]$.

$f(x, t)$ —біртекті мүшесі келесі шарттардың біреуін қанағаттандырады деп болжаймы;

1-шарт. $f(x, t)$ функциясы x айнымалысы бойынша $\left[-\frac{l}{2}; +\frac{l}{2} \right]$

интервалында квадратымен интегралданатын функция, ал $\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \|f(x, t)\| dx$ функциясы

өлшенетін функция және $[0, T]$ интервалында t айнымалысы бойынша бірқалыпты шектелген функция. Және де $f(x, t)$ функциясы

$$\|f(x,t)\|_{(x)}^2 = \left[\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} |f(x,t)| dx \right]^2 \leq 1 \quad (1.1.10)$$

теңсіздігін қанағаттандырады деп болжаймыз.

Кез-келген $C > 0$ үшін $\|f(x,t)\|_{(x)}^2 \leq C$ түріндегі болжам жалпалама кеңейтпейді деп санаймыз.

Бұл шарттар стерженьнің толық энергиясы $E(t) = K(t) + V(t)$ барлық $t \in [0, T]$ үшін бірқалыпты шектелген дегенді білдіреді, мұндағы $K(t)$ мен $V(t)$ (1.1.3) және (1.1.4) формулалармен анықталады. Қарастырып отырған жағдайды *таралған жүктеме* жағдайы деп атаймыз, ал 1 шартты қанағаттандыратын $f(x,t)$ басқару функциясын *таралған басқару* деп атаймыз.

2-шарт. $f(x,t)$ келесі түрге ие деп болжайық,

$$f(x,t) = \sum_{i=1}^N \delta(x - \xi_i(t)) \varphi_i(t) + \sigma(x,t) \quad (1.1.11)$$

мұндағы $\sigma(x,t)$ – таралған басқару, $\delta(x - \xi_i(t))$ – x координат бойымен “қозғалатын” Дирактың дельта-функциясы. $\varphi_i(t)$ функциясы t айнымалысы бойынша өлшенетін функция, және ол барлық $t \in [0, T]$ үшін

$$\sum_{i=1}^N |\varphi_i(t)| + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} |\sigma(x,t)| dx \leq 1 \quad (1.1.12)$$

шартын қанағаттандырады.

Стерженьнің толық энергиясы жоғарыдан қандайда бір константамен бірқалыпты шектелген. Ол үшін (1.1.12) теңдікке орташа моменттерді енгізу керек, яғни

$$f(x,t) = \sum_{i=1}^N \delta(x - \xi_i(t)) \varphi_i(t) + \sum_{i=1}^N \delta'(x - \xi_i(t)) \mu_i(t) + \delta(x,t) \quad (1.1.13)$$

мұндағы штрих дегеніміз $\frac{\partial}{\partial x}$.

Қорыта келе энергия үшін теңдік жазайық. Стерженьнің кинетикалық энергиясы

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \rho(x) A(x) \left(\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (1.1.14)$$

формуласымен анықталады, ал деформацияның потенциалдық энергиясы

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} E(x) I(x) \left(\frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (1.1.15)$$

формуласымен анықталады.

Толық энергия $E(t)$ деформацияның кинетикалық энергиясы мен потенциалдық энергиясының қосындысына тең

$$E = K + V = \frac{1}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left\{ \rho(x) A(x) \left(\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} \right)^2 + E(x) I(x) \left(\frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx \quad (1.1.16)$$

(1.1.14) пен (1.1.15) формулалардың физикалық мағынасынан $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ мен $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$ $\left[-\frac{l}{2}, +\frac{l}{2} \right]$ интервалында квадратымен интегралдануы керек. Бұл шамалар $[0, T]$ интервалында да квадратымен интегралдануы керек. $u(x,t), v(x,t)$ функцияларының көбейтіндісін енгізейік, олардың $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ туындылары $-\frac{l}{2} \leq x \leq +\frac{l}{2}$ интервалында квадратымен интегралданады:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left[\rho(x) A(x) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + E(x) I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] dx \quad (1.1.17)$$

$\langle u, v \rangle$ тек t -дан тәуелді функция болатыны түсінікті. Егер $u = v$ болса, онда $\langle u, v \rangle$ – толық энергия, ол (1.1.14), (1.1.15), (1.1.16) формулалармен анықталған.

1.2 Ақаудың пайда болуы мен дамуының сценаріі

Бұл пункте стерженьнің көлденең тербелістерінің жиілігі бойынша стержень шеттерінің бекітуі анықтау мәселесі қарастырылады. Стерженьнің осьтен көлденең ауытқуы $w(x,t)$, әдетте, Эйлер–Бернулли теңдеуіне

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x)$$

қанағаттандырады. Басында стерженьдердің шеттері қатаң бекітілген болсын. Демек шеттерінің көлденең өзгерістері мүмкін емес. Басқаша айтқанда $w(0,t) = 0, \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = 0$ стерженьнің $x=0$ шетінің қатаң бекітілуі. Бірінші шарттың механикалық мағынасы: $x=0$ шетінде көлденең ауытқу мүмкін емес. Екінші шарттың механикалық мағынасы $x=0$ стерженьнің көлбеу бұрышы нольге тең. Дәл сол сияқты стерженьнің $x=1$ шетінде келесі екі шарт орындалады, яғни $w(1,t) = 0, \frac{\partial w(1,t)}{\partial x} = 0$ стерженьнің $x=1$ шетінің қатаң бекітілуін білдіреді.

Көптеген әдебиетке, мысалы [16], сүйенсек стерженьнің шетінің маңайында көлденең ауытқуларының асимптотикасы келесі түрде

$$\frac{1}{h^2} \left(\vec{e}_1 \cdot w_1(x) + \vec{e}_2 \cdot w_2(x) \right) + \frac{1}{h} \vec{e}_3 \left(w_3(x) - \eta_1 \frac{\partial}{\partial x} w_1(x) - \eta_2 \frac{\partial}{\partial x} w_2(x) \right) + \frac{1}{h} \left(\eta_1 \vec{e}_2 - \eta_2 \vec{e}_1 \right) w_4(x) \quad (1.2.1)$$

жазылады. Мұндағы \vec{e}_3 стерженьнің осымен бағыттас вектор, ал \vec{e}_1 және \vec{e}_2 – стерженнің осыне перпендикуляр бағыттар. Ал $w_1(x), w_2(x)$ – көлденең, $w_3(x)$ стерженьнің бойлық ауытқулары. Өрнектегі $w_4(x)$ – стерженьнің осы бойынша бұрылу бұрышын сипаттайтын шама. Мұндағы h параметрі стерженьнің шетінің маңайының ұзындығын сипаттайтын аз шама. (1.2.1) өрнектегі аз шаманың

көрсеткіштерінің әртүрлі болатындығы физикалық қағидаға сәйкес. Себебі стерженьнің созуы немесе ось бойынша бұрауға қарағанда оның қисаюы тез. Аталған физикалық қағида көптеген [17,18,19,20,21] жұмыстарда талқыланған.

Енді $x=0$ стерженьнің маңайын қарастырайық. Яғни x нольмен h аралығында болсын. Онда Тейлор формуласы бойынша

$$w(x,t) = w(0,t) + \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} x^2$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \approx \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} x + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 w(0,t)}{\partial x^3} x^2$$

$x=0$ шеті қатаң бекітілген болғандықтан,

$$\begin{cases} w(h,t) \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} h^2 \\ \frac{\partial w(h,t)}{\partial x} \approx \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} h + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^3 w(0,t)}{\partial x^3} \end{cases} \quad (1.2.2)$$

орындалады. Серпімділік теорисынан бұраушы момент

$$M(0) = -EJ \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2},$$

және көлденең күш

$$Q(0) = EJ \frac{\partial^3 w(0,t)}{\partial x^3}$$

болатынын байқаймыз. Сондықтан (1.2.2) теңдіктерден бұраушы моментпен және көлденең күш үшін

$$\begin{cases} w(h,t) \approx \frac{-h^2}{2EJ} M(0), \\ \frac{\partial w(h,t)}{\partial x} \approx -\frac{h}{EJ} M(0) + \frac{h^3}{2EJ} Q(0) \end{cases} \quad (1.2.3)$$

катынастары орындалады.

Енді $x=0$ стерженьнің шетінде қалай ақау пайда болатындығын және кейін ол қандай сценариимен дамитынын болжауға болады.

Стерженьнің $x=0$ шетінде басында қатаң бекіту

$$w(0,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (1.2.4)$$

болсын дейік. Эксплуатация кезінде (біраз уақыт өткеннен кейін) (1.2.1) қатынасын ескере отырып,

$$w(0,t) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha_1 \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} \quad (1.2.5)$$

шарттар орындалады. Себебі, h аз шама болғандықтан, келесі иерархия

$$h \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} \gg \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} \gg \frac{h^3}{2} \frac{\partial^3 w(0,t)}{\partial x^3}$$

орындалады. Демек, алдымен $h \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}$ мүшесін ескереміз, ал $\frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}$ және

$\frac{h^3}{2} \frac{\partial^3 w(0,t)}{\partial x^3}$ өте аз шамалар. Яғни, ноль деп ойлауға болады.

Мұндағы α_1 – қандайда бір нақты параметр. Сонымен қатар (1.2.4) бекіту бір кезде (1.2.5) шартына ауысады. Бұл $x=0$ шетіндегі ақаудың пайда бола бастауы. Бұл жағдайда $h^2 \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}$ және $h^3 \frac{\partial^3 w(0,t)}{\partial x^3}$ өте аз шама екендігін көрсетеді. Сондықтан (1.2.5) шарт орындалады. Бұл (1.2.5) шарттың механикалық мағынасы көлбеу бұрышының $\frac{\partial w(0,t)}{\partial x}$ шамасына бұрыштық моменттің $M(0)$ әсерін ескеруге тура келеді. Демек (1.2.4) шартының орнына (1.2.5) шартын ескеруге тура келеді. Осыған дейін қатаң бекіту болса, енді бұрушы моменттің әсерін ескеруге тура келеді. Осындай жағдайды байқап, бірақ стерженьді эксплуатация жасай беруге болады. Бұраушы моменттің әсерінен қатаң бекіту (1.2.4) шартымен бекітуге ауысты, бірақ шеттерінің бекітуі ауысқанымен эксплуатация жасауды жалғастырамыз. Бұл кезде көлбеулік бұрыш пайда болғанымен, стерженьдерді эксплуатация жасауды тоқтатудың қажеті жоқ. Яғни жөндеуді қажет етпейді.

Бірақ бір ескертетін жайт бар: (1.2.4) шарттарына сәйкес көлденең тербелістердің меншікті жиіліктері (1.2.5) шарттары болғанда меншікті жиіліктер өзгереді. Негізгі сұрақтардың бірі: қанша меншікті жиіліктері өзгереді? Өзгерген меншікті жиіліктер бойынша шекаралық күйі (1.2.4) тен (1.2.5) күйге көшкенін табу үшін? Егерде жөндеу жасамай ары қарай стерженьдерді эксплуатация жасай берсек, онда (1.2.4) күйі (1.2.5) күйге ауысқанын 1 деңгейдегі ақау деп атаймыз және бұл ақау әлі жөндеуді талап етпейді деп қабылдаймыз. Сонымен (1.2.5) шарттар $x=0$ шетінде орындалсын деп есептейік. (1.2.2) асимптотикалық қатынастардан (1.2.5) шекаралық шарттар келесі шарттарға ауысады:

$$\begin{cases} w(0,t) = \alpha_2 \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = \alpha_1 \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} \end{cases} \quad (1.2.6)$$

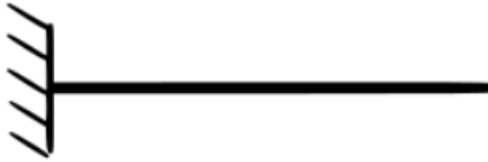
мұндағы $0 < \alpha_2 < \alpha_1$.

Бұл жағдайда $x=0$ шетінде 2 деңгейдегі ақау пайда болды деп санаймыз және бұл жағдайда жөндеуді мерзімі қысқарады. Демек қауіп одан сайын алдыңғы деңгейге қарағанда көбейеді. Бұған дейін бұраушы моменттің әсері арқылы ақаудың дейгейлері өзгеріп тұрды. Енді көлденең күшті $Q(0)$ әсерін ескеруге тура келеді. Осы жайттарды ескерсек, онда стержень эксплуатация кезінде 4 стадиядан өтеді.

1-стадияда қатаң бекіту болады. Бұл кезде стерженьнің теңдеуі

$$\begin{aligned} w(0) &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x}(0) &= 0 \end{aligned}$$

теңдеуімен сипатталады. Бұл стадияда стержень өзінің горизонталь қалпында болады. Ол жағдайдағы стерженьнің сызбасы 1-суретте көрсетілген.



1-сурет

1-стадиядан соң қатаң бекітуден кейін майысуға көшеді. Бұл кезде стерженьнің теңдеуі

$$w(0) = 0, \\ \frac{\partial w(0)}{\partial x} = \alpha_1 \frac{\partial^2 w(0)}{\partial x^2}$$

Бұл стадияда стержень өзінің горизонталь қалпында ауытқып, көлбеулік бұрышқа ие болады. Ол жағдайдағы стерженьнің сызбасы 2-суретте көрсетілген.



2 сурет

Бұл стадияда жөндеу жұмыстарын жүргізудің қажеті аз. Мұнда қатаң бекіту сақталады. Мұнда шеттеріндегі бекіту бастапқыдай қатаң бекіту болып қалады. Тек стержень бойында майысу пайда болады. Яғни стержень сол бастапқы бекітуді сақтап тұрады.

2 стадиядан кейін майысудан шеті босайды. Бұл стадияда стерженьді эксплуатация жасауды жалғастыруға болады. Онда жөндеу жұмыстарын алдағы уақытта жасау керектігін есте сақтауымыз керек. Яғни, стержень шеттері қатаң бекітуден шеттері сәл босауға алмасады. Сондықтан стержень қатаң бекітуден сәл босағандықтан люфт пайда болады. Пайда болған люфт стерженьді толығымен босатпайды. Люфт кезінде қатаң бекітулерде қандайда бір саңылау пайда болады. Люфт кезінде стерженьнің теңдеуі

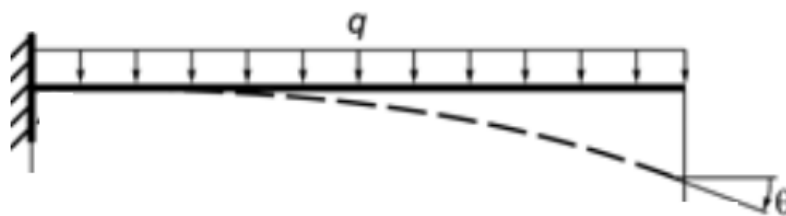
$$w(0) = \beta \frac{\partial^2 w(0)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial w(0)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 w(0)}{\partial x^2}, \quad \alpha \gg \beta$$

түрінде болады. Бұл кезде алда жұмыстарын жасауды есте сақтауымыз керек.

3 стадиядан кейін майысудан шеті сынуға көшеді. Осы кездегі стержень

$$w(0) = \beta \frac{\partial^2 w(0)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial w(0)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 w(0)}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^3 w(0)}{\partial x^3}, \quad \alpha \gg \beta \gg \gamma.$$

теңдеуімен сипатталады. Бұл кезде стерженьге көлденең күш әсер етеді. Соның әсерінен стержень сынады. Бұл жағдайдағы стерженьнің сызбасы 3-суретте көрсетілген.



3-сурет

Яғни, біз мұнда көлденең күш соңында әсер ететінін байқаймыз. Осы көлденең күштің әсерінен стержень сынады. Сонда осы стадиялардан біз келесідей қорытынды жасаймыз: Ең алдымен стерженьді бұраушы момент майыстырады, соның әсерінен оның шеттері босайды, ал көлденең күш әсер еткенде стержень сынады. Бұл кезде шұғыл түрде стерженьге жөндеу жұмыстарын жүргізу керек. Бұл айтылғандардың барлығы стерженьдердің күйлерінің теңдеуінің түрінен Тейлор формуласынан шығады.

1.3. Ақауларға сәйкес дифференциалдық операторлар және олардың меншікті мәндері туралы

Адындағы пунктың қорытындысы бойынша стерженьнің бір шетінің 4 түрлі бекіту стадиясы болуы мүмкін. Стерженьнің екі шеті бар екенін ескерсек, онда екі ұшының мүмкін стадиялары 16-ға жетеді. Осы бекітулерге байланысты келесі жағдайларды қарастырамыз. $x=0$ шеті қатаң бекітілсе, онда $i=0$ деп қабылдаймыз. $x=0$ шетінде көлбеулік бұрыш пайда болғанда, $i=1$ деп алайық, $x=0$ шетінде “люфт” пайда болса, онда $i=2$ деп, ал $x=0$ шетінде көлденең күштің әсері пайда болғанда $i=3$ деп таңдаймыз. Дәл сол сияқты $x=1$ шетінде шеті қатаң бекітілсе, онда $j=0$ деп қабылдаймыз. $x=1$ шетінде көлбеулік бұрыш пайда болғанда, $j=1$ деп алайық, $x=1$ шетінде “люфт” пайда болса, онда $j=2$ деп, ал $x=1$ шетінде көлденең күштің әсері пайда болғанда $j=3$ деп таңдаймыз. Сонымен бізде L_{ij} операторын келесі формуламен

$$L_{ij}w(x) = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} \left(EJ \frac{\partial^2 w(x)}{\partial^2 x} \right), \quad 0 < x < 1.$$

енгізе аламыз.

Мысалы L_{03} деген оператор стерженьнің $x=0$ шеті қатаң бекітілген, ал $x=1$ шетінде көлденең күштің әсері пайда болып, стерженьді сындыруға алын келді дегенді білдіреді. Ал L_{03} деген оператор стерженьнің $x=0$ шеті қатаң бекітілген, ал $x=1$ шетінде көлденең күштің әсері пайда болып, стерженьді сындыруға алын келді дегенді білдіреді.

1.4. Көлденең жүктеменің әсерінен құбырдың статикалық ауытқуының дифференциалдық теңдеуі.

Инженерлік теориядағы аз деформация үшін серпімді деформация осьтік сызықтың квадратына пропорционал және келесі интегралмен

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (1.4.1)$$

сипатталады.

Мұндағы $y = w(x)$ осьтік сызықтың ізделінді теңдеуі, EJ иілудегі қатандық коэффициенті және ол E Юнг модулі мен J балканың инерция моментінің көбейтіндісінен тұрады. Мысалы, анықтамалардан болат үшін Юнг модулі $E = 20.6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ тең болатынын байқаймыз. Дөңгелек цилиндрлік трубадағы көлденең қима S пен инерция мен моменті J

$$S = \pi(a^2 - b^2), \quad J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b \sin^2 \varphi r^3 dr = \pi \cdot \frac{a^4 - b^4}{4} = S \cdot \frac{a^2 + b^2}{4} \quad (1.4.2)$$

Қатаң деформацияның (1.4.1) потенциалдық энергиясы $w(x)$ орын ауыстыруындағы көлденең $q(x)$ жүктеменің A жұмысының әсерінен пайда болады:

$$A = \int_0^L q w dx \quad (1.4.3)$$

Осылайша (1.4.1) мен (1.4.3) теңдіктерді теңестіріп

$$\frac{1}{2} \int_0^L EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = \int_0^L q w dx \quad (1.4.4)$$

(1.4.4) функционалды минималь мәнге әкелетін (1.4.4) интегралдық теңдіктен $w(x)$ функциясын табу керек. Ол функцияны табу үшін вариациялық қисапты пайдаланамыз. (1.4.4) теңдіктің екі жағынан вариацияны есептеп, келесі теңдікті аламыз

$$\int_0^L EJ w'' \delta(w'') dx = \int_0^L q(x) \delta(w) dx \quad (1.4.5)$$

$\delta(w)$ вариациясының ішінде x айнымалысынан тәуелді интегралдау интервалының шеттерінде нольге айналатын кез-келген функция орналасады. Вариация операциясы дифференциалдау операциясымен алмасады, яғни

$$\delta(w') = \frac{d}{dx} \delta(w) \quad (1.4.6)$$

Осыны ескеріп, (1.4.5) теңдіктің сол жағынан интегралды екі рет бөліктеп алуға болады. Бір рет интегралдап,

$$\int_0^L EJ w'' \delta(w'') dx = \int_0^L EJ w'' \frac{d}{dx} \delta(w') dx = EJ w'' \delta(w') \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d}{dx} (EJ w'') \delta(w') dx \quad (1.4.7)$$

Дәл осылай екі рет бөліктеп интегралдағаннан кейін

$$\int_0^L EJ w'' \delta(w'') dx = EJ w'' \delta(w') \Big|_0^L - \frac{d}{dx} [EJ w''] \delta(w) \Big|_0^L + \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} (EJ w'') \delta(w) dx \quad (1.4.8)$$

Осылайша (1.4.5) формула (1.4.8) теңдіктен кейін

$$EJ w'' \delta(w') \Big|_0^L - \frac{d}{dx} [EJ w''] \delta(w) \Big|_0^L + \int_0^L \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - q(x) \right] \delta(w) dx \quad (1.4.9)$$

(1.4.9) теңдіктің интегралдан тыс мүшелері нольге айналады, себебі $\delta(w)$ мен $\delta(w')$ вариациялар қарастырып отырған облыстың шеттерінде нольге айналады ($x = 0$ мен $x = L$ болғанда).

Бұл заңдылық (1.4.9) теңдікті нольге алып келеді, ол дегеніміз тік жақшаны

нольге тең қылуға алып келу болады. Осының нәтижесінде иілу функциясы $w(x)$ -ті сипаттайтын дифференциалдық теңдеуге келеміз:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q(x) \quad (1.4.10)$$

Осылайша, бізге трубаға түскен көлденең жүктеме $q(x)$ белгілі болса, онда $w(x)$ иілуді есептеу үшін сәйкес ұштарындағы шеттік шарттарды пайдаланып, (1.4.10) дифференциалдық теңдеуді аналитикалық немесе сандық әдіспен шешеді. Бұл теңдеу төртінші ретті теңдеу болғандықтан, оған төрт шеттік шарт қоюымыз керек, ол шарттар ретінде $x=0$ мен $x=L$ болғанда $w(x)$ функциясының мәндері мен туындыларының мәндерінің комбинациясын пайдаланамыз. Құбырдың көлденең тербеліс теңдеуін (1.4.10) дифференциалдық теңдеу сипаттайды.

Есептеу жүргізу үшін келесі маңызды жерлерді айтайық. Трубаның $x = const$ көлденең қимасына түскен иілу моменті $M(x)$ пен көлденең күш $F(x)$

$$EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x), \quad \frac{d}{dx} \left[EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = F(x) \quad (1.4.11)$$

теңдіктерімен сипатталады.

(1.4.10) дифференциалдық теңдеуді шеші кезінде шеттік шарттар трубаның ұштарының бекіту тәсіліне байланысты таңдалады. Мысалы, трубаның екі ұшы қатаң бекітілген болса, онда келесі төрт шеттік шарт болады:

$$w(0)=0, \quad w'(0)=0, \quad w(L)=0, \quad w'(L)=0 \quad (1.4.12)$$

Егер екінші ұшы бос болса, онда $x=L$ қимасына түсірілген күш пен момент нольге тең болуы керек. Онда (1.4.11) теңдіктен, қимасы тұрақты труба үшін шеттік шарт келесідей болады:

$$w(0)=0, \quad w'(0)=0, \quad w''(L)=0, \quad w'''(L)=0 \quad (1.4.13)$$

Яғни, ұшы бос болған кезде $w(x)$ иілу функциясының екінші және үшінші ретті туындылары нольге тең болады.

1.4.1 Серпімді трубаның көлденең иілу тербелістері

Серпімді трубаның көлденең иілу тербелістерінің дифференциалдық теңдеуін негізгі (1.4.10) статикалық теңдеудегі $q(x)$ жүктемені трубадағы бірлік инерция күшімен алмастырып ала аламыз:

$$q(x) = -\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (1.4.1.1)$$

Мұндағы S – қима ауданы, ал ρ – трубаның материалының тығыздығы. Болат үшін тығыздық $\rho \approx 8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ тең.

Осылайша трубаның көлденең иілу тербелістері

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (1.4.1.2)$$

Егер трубаның қимасы тұрақты болса, онда EJ қатаңдық коэффициентін жақшаның алдына шығарсақ, онда (1.4.1.2) теңдеу келесідей болады:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EJ} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4.1.3)$$

(1.4.1.3) теңдеудің шешімдерін уақыт бойынша периодты және ω бұрыштық жиілікпен тербелетін функциялардың көбейтіндісі ретінде қарастырамыз:

$$w(x, t) = \cos(\omega t + \varepsilon)W(x). \quad (1.4.1.4)$$

Онда $W(x)$ функциясы үшін, осьтік сызықтағы толқынды анықтайтын қарапайым дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{1}{L^4} \left(\frac{\rho S \omega^2 L^4}{EJ} \right) W = 0. \quad (1.4.1.5)$$

(1.4.1.5) формуладағы жақшаның ішіндегі өрнек өлшемсіз шамаға тең. Онда оған жаңа белгілеу енгізген тиімді

$$\frac{\rho S \omega^2 L^4}{EJ} = \lambda^4. \quad (1.4.1.6)$$

Егер λ параметрінің мәні белгілі болса, онда (1.4.1.6) теңдіктен трубаның тербелісінің ω жиілігін табуға болады:

$$\omega^2 = \frac{EJ \lambda^4}{\rho S L^4}, \quad \omega = \frac{\lambda^2}{L^2} \sqrt{\frac{J}{S}} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (1.4.1.7)$$

(1.4.1.7) теңдіктегі радикалдардың физикалық мағынасы бар. $\sqrt{\frac{J}{S}}$ – трубаның көлденең қимасының инерция моменті, ал $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – иілу деформациясы кезінде трубаның көлденең қимасының нүктелердің орын ауыстыруының жылдамдығын сипаттайды. Болат труба үшін $\sqrt{\frac{E}{\rho}} = 13622 \text{ м/с}$.

Осьтік сызықтағы тербелмелі нүктенің стационар теңдеуі (1.4.1.6) теңдіктегі белгілеулерді ескеріп, келесі түрде жазуға болады:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{\lambda^4}{L^4} W = 0 \quad (1.4.1.8)$$

Оның жалпы шешімі A, B, C, D константаларымен гиперболалық және тригонометриялық функциялармен сипатталады және келесі түрде сипатталады:

$$W(x) = A \operatorname{ch} \lambda \frac{x}{L} + B \cos \lambda \frac{x}{L} + C \operatorname{sh} \lambda \frac{x}{L} + D \sin \lambda \frac{x}{L}. \quad (1.4.1.9)$$

1.4.2 Труба ұштарын бекітудің жағдайларына арналған шешімдер

Труба ұштарын бекітудің үш жағдайы үшін (1.4.1.8) теңдеуінің шешімдерін қарастырайық: екі ұшы да қатаң бекітілген; екі ұшы да бос; бір ұшы бекітілген екінші ұшы бос.

Бірінші жағдайда келесі шеттік шарттар орындалуы керек:

$$W(0) = 0, \quad W'(0) = 0, \quad W(L) = 0, \quad W'(L) = 0. \quad (1.4.2.1)$$

Онда (1.4.1.9) теңдікпен сипатталған шешім келесідей болады:

$$W(x) = A \left[\operatorname{ch} \lambda \frac{x}{L} - \cos \lambda \frac{x}{L} \right] + B \left[\operatorname{sh} \lambda \frac{x}{L} - \sin \lambda \frac{x}{L} \right] \quad (1.4.2.2)$$

Мұндағы квадрат жақшалардағы функцияларды әдетте Крылов функциялары деп атайды, олар (1.4.1.8) теңдеуді қанағаттандырады және $x=0$ болғанда

бірінші туындысымен бірге нольге тең болады. (1.4.2.1) шеттік шартты (1.4.2.2) теңдік үшін трубаның екінші ұшы ($x = L$ кезінде) үшін екі теңдікпен жазайық

$$\begin{aligned} W(L) &= A[ch\lambda - \cos \lambda] + B[sh\lambda - \sin \lambda] = 0, \\ W'(L) &= A \frac{\lambda}{L} [sh\lambda + \sin \lambda] + B \frac{\lambda}{L} [ch\lambda - \cos \lambda] = 0 \end{aligned} \quad (1.4.2.3)$$

Олай болса, A, B коэффициенттеріне қатысты екі алгебралық теңдеулерден құралған теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{aligned} A[ch\lambda - \cos \lambda] + B[sh\lambda - \sin \lambda] &= 0, \\ A[sh\lambda + \sin \lambda] + B[ch\lambda - \cos \lambda] &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.2.4)$$

Бұл жүйенің нольдік емес шешімі болуы үшін оның анықтауышы нольге тең болуы керек, одан өзге B коэффициентін A арқылы келесі формуладай өрнектей алу керек

$$B = -A \frac{ch\lambda - \cos \lambda}{sh\lambda - \sin \lambda} \quad (1.4.2.5)$$

(1.4.2.5) теңдікті (1.4.2.2) теңдікке қойып, құбырдың көлденең иілу өрнегі

$$W(x) = \left[ch\lambda - \cos \lambda \frac{x}{L} \right] - \frac{ch\lambda - \cos \lambda}{sh\lambda - \sin \lambda} \left[sh\lambda \frac{x}{L} - \sin \lambda \frac{x}{L} \right] \quad (1.4.2.6)$$

аламыз. λ параметрін (1.4.2.6) жүйенің анықтауышы нольге тең болу шартынан табамыз:

$$\begin{vmatrix} ch\lambda - \cos \lambda & sh\lambda - \sin \lambda \\ sh\lambda + \sin \lambda & ch\lambda - \cos \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Осы анықтауышты есептеп ықшамдағаннан кейін

$$\begin{aligned} (ch\lambda - \cos \lambda)^2 - (sh\lambda + \sin \lambda)(sh\lambda - \sin \lambda) &= \\ = ch^2\lambda - 2ch\lambda \cos \lambda + \cos^2 \lambda - sh^2\lambda + \sin^2 \lambda &= 2 - 2ch\lambda \cos \lambda = 0 \end{aligned}$$

теңдігін аламыз. λ параметрін анықтау үшін қажетті сипаттамалық теңдеу

$$ch\lambda \cos \lambda = 1 \quad (1.4.2.7)$$

түрінде болады. (1.4.2.7) теңдеудің шексіз көп шешімі бар. $\lambda = 0$ түбіріне $W(x) = 0$ шешімі сәйкес келеді. (1.4.2.7) теңдеудің қалған оң мәндері қандайда бір сандық әдіспен табылады. Олардың кейбір мәндері

$$\lambda_1 = 4.730, \lambda_2 = 7.853, \lambda_3 = 10.966, \lambda_4 = 14.137, \lambda_5 = 17.279, \dots, \quad (1.4.2.8)$$

Әр λ_n түбірі үшін өзінің тербеліс жиілігі бар және ол (1.4.2.7) формула бойынша есептелінеді және өзінің тербеліс формасы бар болғандықтан, онда

$$W_n(x) = \left[ch\lambda_n \frac{x}{L} - \cos \lambda_n \frac{x}{L} \right] - \frac{ch\lambda_n - \cos \lambda_n}{sh\lambda_n - \sin \lambda_n} \left[sh\lambda_n \frac{x}{L} - \sin \lambda_n \frac{x}{L} \right] \quad (1.4.2.9)$$

Осыған ұқсас формулаларды құбырдың ұштарының әртүрлі бекітілуі үшін әртүрлі тәсілмен алуға болады.

Бекітудің екінші жағдайын, яғни екі ұшыда бекітілмеген жағдайда, шекаралық шарттар күштер мен моменттердің (1.4.11) нольге тең болуына алып келінеді, яғни екі ұшында $W(x)$ функциясының x бойынша екінші және үшінші туындысы нольге тең болуы керек.

$$W''(0) = 0, W'''(0) = 0, W''(L) = 0, W'''(L) = 0 \quad (1.4.2.10)$$

Осы жағдай үшін (1.4.1.8) тербеліс теңдеуінің шешімін келесі түрде болатынын байқаймыз.

$$W(x) = A \left[ch\lambda \frac{x}{L} + \cos \lambda \frac{x}{L} \right] + B \left[sh\lambda \frac{x}{L} + \sin \lambda \frac{x}{L} \right] \quad (1.4.2.11)$$

Мұндағы тік жақшалардағы екі функция $x=0$ болғандағы екінші және үшінші туындылар нөлге тең шартын қанағаттандырады. Бұл шарттар $x=L$ болғанда орындалуы үшін A мен B коэффициенттеріне қатысты келесі сызықты біртекті алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз.

$$\begin{aligned} A[ch\lambda - \cos \lambda] + B[sh\lambda - \sin \lambda] &= 0, \\ A[sh\lambda - \sin \lambda] + B[ch\lambda - \cos \lambda] &= 0. \end{aligned}$$

Бұл теңдеулер жүйесі екі ұшы қысылған құбыр үшін жазылған (1.4.2.4) жүйемен сәйкес келді. Сондықтан оның сипаттамалық теңдеулерінің λ_n түбірлері (1.4.2.8) теңдіктегі сандармен сәйкес келеді. Бұл дегеніміз ұштары бос құбырдың тербелісінің жиілігі екі ұшы қысылған құбырдың тербелісінің жиілігімен сәйкес келеді деген сөз. Бірақ олардың формалары бұл жағдайда әртүрлі болады. Яғни келесі түрде болады:

$$W_n(x) = \left[ch\lambda_n \frac{x}{L} + \cos \lambda_n \frac{x}{L} \right] - \frac{ch\lambda_n - \cos \lambda_n}{sh\lambda_n - \sin \lambda_n} \left[sh\lambda_n \frac{x}{L} + \sin \lambda_n \frac{x}{L} \right]. \quad (1.4.2.12)$$

Осыдан $W_n(x)$ функциясы мен оның $x=0$ мен $x=L$ болған кездегі x бойынша туындылары нөлге тең емес.

Үшінші жағдай: Құбыр $x=0$ нүктесінде бекітілген, ал екінші ұшы бос. Онда (1.4.18) теңдеу үшін шекаралық шарттар

$$W(0) = 0, \quad W'(0) = 0, \quad W''(L) = 0, \quad W'''(L) = 0 \quad (1.4.2.13)$$

түрінде болады. Бұл жағдайда шешімін (1.4.2.6) түрінде іздеу керек, яғни

$$W(x) = A \left[ch\lambda \frac{x}{L} - \cos \lambda \frac{x}{L} \right] + B \left[sh\lambda \frac{x}{L} - \sin \lambda \frac{x}{L} \right] \quad (1.4.2.14)$$

$x=L$ нүктесінде (1.4.2.14) теңдіктегі функциялардың x бойынша екінші және үшінші туындыларын нөлге теңестіре отырып, A мен B коэффициенттеріне қатысты келесі сызықты біртекті алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{aligned} A[ch\lambda + \cos \lambda] + B[sh\lambda + \sin \lambda] &= 0, \\ A[sh\lambda - \sin \lambda] + B[ch\lambda + \cos \lambda] &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.2.15)$$

Бірінші теңдеуден B коэффициентін табамыз:

$$B = -A \frac{ch\lambda + \cos \lambda}{sh\lambda + \sin \lambda} \quad (1.4.2.16)$$

Осы (1.4.2.15) анықтаушыты есептеп ықшамдағаннан кейін

$$(ch\lambda + \cos \lambda)^2 - (sh^2 \lambda - \sin^2 \lambda) = 2 + 2ch\lambda \cos \lambda = 0$$

теңдігін аламыз. Осыдан λ_n шамасы

$$ch\lambda \cos \lambda = -1 \quad (1.4.2.17)$$

сипаттамалық теңдеудің шешімі болатынын байқаймыз. Олар (1.4.2.8) теңдіктегі түбірлермен сәйкес келмейді. Сандық әдіспен есептеулер келесі жуық мәндерді көрсетті:

$$\lambda_1 = 1.875, \quad \lambda_2 = 4.694, \quad \lambda_3 = 7.855, \quad \lambda_4 = 10.996, \quad \lambda_5 = 14.137, \quad \lambda_6 = 17.279, \dots \quad (1.4.2.18)$$

Бұл мәндерді алдыңғы есеппен (1.4.2.8) салыстыра отырып, өзгешелік тек алғашқы үш түбірде екенін байқаймыз, ал қалған түбірлер сәйкес келетінін байқаймыз. Осылайша бір ұшы бекітілген екінші ұшы бос құбыр үшінде

тербелістің алғашқы үш тоны төменгі жиілікте болады, ал қалған тондары екі ұшы қысылған немесе бос құбырлардың жиіліктерімен сәйкес келеді.

1.5. Стерженьнің ұшының бекітуінің идентификациясы

Енді стержень ұштарының акустикалық диагностикасына тоқталайық. Стержень ұштарының акустикалық диагностикасын зерттеуде келесі зерттеулер жүргізілді: бүтін функцияларды салыстыру әдісінің көмегімен иілу тербелістерінің барлық меншікті жиіліктері бойынша стержень бір ұшын бекіту шарттарын табу мәселесін шешудің бірегейлігі туралы теорема дәлелденеді. Жалғыздық теоремасының шарттарының бірінің маңыздылығы мысалдар мен қарсы мысалдар арқылы көрсетіледі. Стержень бір ұшын меншікті жиіліктермен бекіту түрі мен параметрлерін анықтау мәселесін шешудің үш әдісі ұсынылады: биортогональды жүйе әдісі, жақсы анықталған матрица әдісі, анықталмаған жүйе әдісі. Шешу әдістері жиілік теңдеуінен шеттік шарттардың коэффициенттерінен тұратын матрицаның максималды реті бойынша белгісіз минорларды табу тәсілдерімен ерекшеленеді. Шеттік шарттарды табу мәселесін шешудің жалғыздығы туралы тағы бір теорема дәлелденеді. Егер белгілі бір матрицаның дәрежесі үшке тең болса, онда шеттік шарттарды табу жалғыздығы үшін тек үш меншікті жиілікті қолдану жеткілікті. Белгісізді табу анықталмаған жүйе әдісін қолдана отырып, үш меншікті жиілік бойынша меншікті шарттарының коэффициенттерінен тұратын матрица мысалдарымен келтіріледі.

1.5.1. Кері есепті қою

Стерженьді әр түрлі жолмен бекітуге болады. Егер стерженьді ұштары визуалды тексеру үшін қол жетімді болмаса, онда өзектің соққысынан туындаған тербелістердің дыбысы бойынша оларды бекіту түрі мен параметрлерін анықтауға мүмкін бе деген сұрақ туындайды. Осы сұраққа байланысты мүмкін есептердің бірі келесідей: біртекті өзектің ұштарының бірін оның тербелістерінің меншікті жиіліктері бойынша бекіту түрі мен параметрлерін анықтау. Басқаша айтқанда, біртекті стерженнің әр ұшын бекіту түрін анықтау және оның параметрлері (серпімді бекіту кезіндегі серіппелердің қаттылық коэффициенттері) анықтау есептерінен тұрады.

Жоғарыдағы параграфта келтірілгендей, тұрақты қатаңдығы бар біртекті стерженнің иілу тербелістерінің теңдеуі келесідей болатынын еске саламыз

$$EI \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

бұл жерде $U(x,t)$ – өзек осінің ағымдағы нүктесінің ауытқуы; EI – өзектің иілу қатаңдығы; ρ – өзектің тығыздығы; F – стерженнің көлденең қимасының ауданы.

λ^4 арқылы $\rho F \omega^2 / \alpha$ -ны белгілейік. Жаңа белгілеулерде оң жақ ұшы қатты қысылған стерженнің иілу тербелісі туралы $u(x,t) = y(x) \cos(\omega t)$ алмастыруымен келесі спектрлік есепке келтіріледі:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, U_1(y) = 0, U_2(y) = 0, y(1) = 0, y'(1) = 0. \quad (1.5.1.1)$$

мұндағы $\lambda^4 = \rho F \omega^2 / \alpha$, $\alpha = EI$, $U_i(y, \omega) = \sum_{j=1}^4 a_{ij} y^{(j-1)}(0)$ ($i=1,2$) дегеніміз $x=0$ нүктесінде бекітуді сипаттайтын сызықтық пішіндер және серпімді бекіту параметрлері [22], $a_{ij} \in R$.

Біз осы спектрлік мәселеге керісінше есеп қоямыз: стерженнің иілу тербелістерінің меншікті жиіліктері бойынша белгісіз $U_1(y)=0, U_2(y)=0$. Шектік шарттарды табу.

«Шеттік шарттарды табу» деген нені білдіреді? Бір қарағанда, бұл барлық a_{ij} коэффициенттерін табу керек дегенді білдіруі мүмкін. Алайда, бұл қате мәлімдеме. Мәселе мынада, бір шеттік шарт мүлдем басқа коэффициенттерге ие болуы мүмкін. Мысалы, $y(0)=0$ және $5y(0)=0$ шарттарының a_{11} коэффициенттері мүлдем басқа. Бірінші жағдайда бұл 1, ал екінші жағдайда – 5.

Алайда бұл коэффициенттер бірдей шеттік шартқа сәйкес келеді. Сондықтан, $\|a_{ij}\|$ матрицасының коэффициенттерін емес, сызықтық эквиваленттілікке дейін іздеу керек. $\|a_{ij}\|$ матрицасын іздеу $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})^T$, $i=1,2$ векторларынан құрастырған $\langle a_1, a_2 \rangle$ сызықтық қабығын табуға тең.

$U_1(y)$ және $U_2(y)$ формаларының a_{ij} коэффициенттерінен A арқылы, ал оның екінші ретті минорларын — M_{ij} арқылы жасалған матрицаны белгілейміз:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}.$$

$U_1(y), U_2(y)$ формаларын табу $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})^T$, $i=1,2$ векторларынан құрастырған $\langle a_1, a_2 \rangle$ сызықтық қабығын табумен тең.

Стерженнің ұшын бекітудің әртүрлі жағдайлары бар [23, 24]. Олардың матрицалық сипаты келесі түрде болады:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$A = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c_2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Барлық он жағдайда

$$M_{14} = 0, \quad M_{23} = 0 \tag{1.5.1.2}$$

екенін байқаймыз.

Сонымен қатар, A матрицасы келесі түрге ие деп санауға болады:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \end{vmatrix} \tag{1.5.1.3}$$

Сондықтан, спектрлік есеп тұрғысынан (1.2.1) жоғарыда келтірілген кері есеп келесідей тұжырымдалады :

(1.5.1.1) есептердің $U_1(y)$ және $U_2(y)$ формаларының a_{ij} коэффициенттері

белгісіз, осы коэффициенттерден тұратын A матрицасының рангі екіге тең, осы матрицаның M_{14} және M_{23} минорлары нөлге тең; нөлден ерекшеленетіні (1.5.1.1) есептің λ_k меншікті мәндері; $\langle a_1, a_2 \rangle$ векторларының $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})^T$ $i = 1, 2$, сызықтық қабығын қалпына келтіру қажет. (1.5.1.2) шарттар есептің физикалық орналасуын шектемейді, бірақ олар қажет, өйткені оларсыз қарастырылып отырған кері есепті шешудің бірегейлігі бұзылады (бұл жағдайда меншікті мәндердің бірдей жиынтығы әртүрлі сызықтық қабықтарға сәйкес келуі мүмкін; сәйкес қарсы мысал төменде келтірілген).

1.5.2. Кері есепті шешудің жалғыздығы.

Қойылған мәселені шешудің бірегейлігін және (1.5.1.1) дәлелдеу үшін келесі спектрлік есепті қарастырамыз:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \quad \tilde{U}_1(y) = 0, \quad \tilde{U}_2(y) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 \quad (1.5.2.1)$$

мұндағы $\tilde{U}_i(y) = \sum_{j=1}^4 b_{ij} y^{(j-1)}(0)$ ($i = 1, 2$), $b_{ij} \in R$.

b_{ij} коэффициенттерінен және $\tilde{U}_1(y)$ мен $\tilde{U}_2(y)$ формаларынан тұратын матрицаны B арқылы белгілейміз, ал оның минорларын \tilde{M}_{ij} арқылы белгілейміз.

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{vmatrix}, \quad \tilde{M}_{ij} = \begin{vmatrix} b_{1i} & b_{1j} \\ b_{2i} & b_{2j} \end{vmatrix}$$

$\langle b_1, b_2 \rangle$ арқылы $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, b_{i4})^T$, $i = 1, 2$ векторларының сызықтық қабығын белгілейміз.

Теорема 1.5.2.1. *Келесі шарттар орындалсын:*

$$\text{rang} A = \text{rang} B = 2, \quad (1.5.2.2)$$

$$M_{14} = M_{23} = \tilde{M}_{14} = \tilde{M}_{23} = 0 \quad (1.5.2.3)$$

Егер нөлден басқа λ_k есептерінің меншікті мәндері (1.5.1.1) және нөлден басқа λ_k есептерінің меншікті мәндері (1.5.2.1) олардың еселіктері ескере отырып сәйкес келсе, онда $\langle a_1, a_2 \rangle$ және $\langle b_1, b_2 \rangle$ сызықтық қабықшалары да сәйкес келеді.

Дәлелдеу.

$$\begin{aligned} y_1(x, \lambda) &= (\cos \lambda x + ch \lambda x) / 2, \\ y_2(x, \lambda) &= (\sin \lambda x + sh \lambda x) / (2\lambda), \\ y_3(x, \lambda) &= (-\cos \lambda x + ch \lambda x) / (2\lambda^2), \\ y_4(x, \lambda) &= (-\sin \lambda x + sh \lambda x) / (2\lambda^3) \end{aligned} \quad (1.5.2.4)$$

функциялары

$$y_j^{(r-1)}(0, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{егер } j \neq r \\ 1, & \text{егер } j = r \end{cases} \quad j, r = \overline{1, 4} \quad (1.5.2.5)$$

шарттарын қанағаттандыратын

$$y^{(4)}(x, \lambda) = \lambda^4 y(x, \lambda) \quad (1.5.2.6)$$

теңдеуінің сызықты шешімдері болады.

$\lambda \neq 0$ кезіндегі шектік есептің сипаттамалық анықтауышы келесі функция болып табылады:

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ y_1(1, \lambda) & y_2(1, \lambda) & y_3(1, \lambda) & y_4(1, \lambda) \\ y_1'(1, \lambda) & y_2'(1, \lambda) & y_3'(1, \lambda) & y_4'(1, \lambda) \end{vmatrix}.$$

Анықтауыштарды есептеу үшін Лаплас теоремасын және тригонометриялық формулалар мен (1.5.2.4) теңдіктерін қолданамыз, сондай-ақ (1.5.2.3) шарт теоремаларын қолданып,

$$\Delta(\lambda) \equiv M_{12} \frac{\xi^-(\lambda)}{2\lambda^4} + M_{13} \frac{\eta^+(\lambda)}{2\lambda^3} + M_{24} \frac{\eta^-(\lambda)}{2\lambda} + M_{34} \frac{\xi^+(\lambda)}{2}, \quad (1.5.2.7)$$

$$\xi^\pm(\lambda) = 1 \pm \cos \lambda ch\lambda, \quad \eta^\pm(\lambda) = -\sin \lambda ch\lambda \pm \cos \lambda sh\lambda.$$

(1.5.1.1), (1.5.2.1) есептердің нөлден басқа меншікті мәндері $\Delta(\lambda)$ бүтін функциясының түбірлері болып табылады.

Сипаттамалық анықтауыш $\Delta(\lambda)$ есептің нөлден басқа меншікті мәндерімен сәйкес келетін түбірлерден басқа, $\lambda = 0$ ақырлы еселік түбірі де болуы мүмкін. $\Delta(\lambda) \neq 0$ $\Delta(\lambda) \equiv 0$ болғандықтан, Адамар теоремасынан (1.5.1.1) есептерінің $\Delta(\lambda)$ және (1.5.1.4) есептерінің $\tilde{\Delta}(\lambda)$ сипаттамалық анықтауыштарының арақатынасы

$$\Delta(\lambda) \equiv C \lambda^k e^{a\lambda} \tilde{\Delta}(\lambda) \quad (1.5.2.8)$$

екендігі шығады. Мұндағы a – кейбір нақты сан; k – кейбір теріс емес бүтін сан, ал C – нөлден басқа тұрақты. Енді, a саны нөлге тең екенін ескереміз. Бұл $\Delta(\lambda)$ функциясының жұптығынан туындайды.

Енді $k = 0$ екенін көрсетейік. Айталық, керісінше болсын $k \neq 0$. Онда

$$\frac{\eta^+(\lambda)}{2\lambda^3}, \frac{\eta^-(\lambda)}{2\lambda}, \frac{\xi^+(\lambda)}{2}, \frac{\xi^-(\lambda)}{2\lambda^4}, \lambda^k \frac{\eta^+(\lambda)}{2\lambda^3}, \lambda^k \frac{\eta^-(\lambda)}{2\lambda}, \lambda^k \frac{\xi^+(\lambda)}{2}, \lambda^k \frac{\xi^-(\lambda)}{2\lambda^4}$$

функциялары сызықты тәуелсіз. Онда (1.5.2.8) теңдіктен

$$\begin{aligned} M_{12} = M_{13} = M_{14} = M_{23} = M_{24} = M_{34} = \\ = \tilde{M}_{12} = \tilde{M}_{13} = \tilde{M}_{14} = \tilde{M}_{23} = \tilde{M}_{24} = \tilde{M}_{34} = 0 \end{aligned}$$

Соңғы теңдік теореманың (1.5.2.2) шартына қайшы келеді. Осылайша (1.5.2.2)

теңдікте $a = k = 0$. Осыдан және $\frac{\eta^+(\lambda)}{2\lambda^3}, \frac{\eta^-(\lambda)}{2\lambda}, \frac{\xi^+(\lambda)}{2}, \frac{\xi^-(\lambda)}{2\lambda^4}$ функциялардың

сызықты тәуелсіздігінен

$$(M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34})^T = C \cdot (\tilde{M}_{12}, \tilde{M}_{13}, \tilde{M}_{14}, \tilde{M}_{23}, \tilde{M}_{24}, \tilde{M}_{34})^T$$

теңдігін аламыз, ол $a_1 \wedge a_2$ және $b_1 \wedge b_2$ бивекторлардың пропорционалдығымен тепе-тең.

Векторлық кеңістіктің пропорционал, нөлдік емес бивекторлар кластары мен екі өлшемді ішкі кеңістіктері арасында табиғи биективті сәйкестік бар екені белгілі [25]. Бұл сәйкестікте әрбір ішкі кеңістік оның ерікті базисі x_1, x_2 векторларының $x_1 \wedge x_2$ сыртқы туындысына, ал әрбір бивектор $x_1 \wedge x_2 \langle x_1, x_2 \rangle$ ішкі кеңістігіне сәйкес келеді. Демек, соңғы сәйкестік дәлелденуге тиіс $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle$ мәндерін білдіреді.

Қарсы мысал 1.5.2.1. (1.5.1.2) шарттар жоғарыда айтылғандай, мәселенің физикалық орналасуын шектемейді, шеткі жағдайларды қалпына келтірудің

бірегейлігі үшін маңызды емес. Шынында да, $y(0)=0$, $y'''(0)=0$ ($M_{14}=1 \neq 0$) және $y'(0)=0$, $y''(0)=0$ ($M_{23}=1 \neq 0$) шеттік шарттар эквивалентті емес, бірақ (1.5.1.1) және (1.5.2.1) спектрлік есептердің сипаттамалық анықтауыштары сәйкес келеді. Бұдан шығатыны, абстрактілі шекті жағдайлар, физикалық тұрғыдан негізделген жағдайлардан айырмашылығы, тиісті мәселесінің нөлден басқа меншікті мәндері бойынша екіұшты түрде қалпына келтіріледі.

Бірегейлік теоремасын дәлелдеуде қолданылатын әдісті бүтін функцияларды салыстыру әдісі деп атаймыз. Ол шеттік есептің меншікті жиіліктерінің жиынтығында (оның бүкіл спектрінде) шеттік жағдайларды қалпына келтірудің біртектілік теоремасын дәлелдеу қажет болған жағдайда ғана қолданылады. Оның мәні мынада: сипаттамалық анықтауыштар $\Delta(\lambda)$ және $\Delta(\lambda)$ бірдей спектрі бар екі түрлі есептер үшін тұрақты фактормен ерекшеленеді. Бұл өз кезегінде толқындары бар және толқындары жоқ сәйкес векторлардың, олардың құрамдас бөліктері максималды ретті минорлар ретінде қызмет ететіндігін көрсетуге мүмкіндік береді. Бұл толқыны бар және толқыны жоқ коэффициенттердің кеңістіктері ортақ "қалыпты векторға" ие, яғни, сәйкес келеді.

1.5.3 Биортогональды жүйе әдісі және жақсы анықталған матрица әдісі.

Жоғарыда $U_1(y)$, $U_2(y)$ белгісіз сызықтық формаларын стерженнің иілу тербелістерінің меншікті жиіліктерінен табу міндеті жалғыз шешімге ие екендігі көрсетілген (осы сызықтық формалардың коэффициенттерінен тұратын сызықтық қабықшалар бір мәнді түрде анықталады). Осылардан келесі сұрақтар туындайды: есеп шешіле ме, егер шешілсе, оның шешімі тұрақты ма?

Табиғи жиіліктерді өлшеу құралдары (жиілік өлшегіштер) жүйенің жиіліктерінің шексіз жиынтығын бекіте алмайды, сонымен қатар, табиғи жиіліктерді өлшеу кезінде кішігірім қателіктер болуы мүмкін, сондықтан шешімнің тұрақтылығы және белгілі бір қателікпен табылған алғашқы табиғи жиіліктердің соңғы жиынтығы бойынша стерженді бекіту түрін анықтаудың жуықталған әдістері туралы сұрақ туындайды. Осы міндеттерді шешуге, нақты және жақын шешімдер құруға және осы абзацқа арналған. Шекті жағдайлардың сызықтық формаларын анықтау әдісі A матрицасының c_1 және c_2 коэффициенттері теріс емес деген табиғи физикалық болжамдармен түсіндіріледі. $\langle a_1, a_2 \rangle$ сызықтық қабығы белгілі сызықтық алгебра әдістерін қолдана отырып, A матрицасының екінші ретті барлық минорларында орналасқандықтан [25], белгісіз минорлар

$$M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} \quad (1.5.3.1)$$

қалай анықталатынын түсіндіру қалады.

(1.5.2.7) теңдіктен, $\Delta(\lambda)$ – бірінші ретті жұп бүтін функция болады, және егер осы функцияның түбірлері $\lambda_j > 0$ болса, онда $-\lambda_j, -i\lambda_j, i\lambda_j$ мәндеріде осы функцияның түбірлері болады.

Осыдан және Адамар теоремасынан (1.5.1.1) есептің сипаттамалық анықтаушы $\Delta(\lambda)$ келесі түрде сипатталады

$$\Delta(\lambda) \equiv K \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^4}{\lambda_j^4} \right), \quad (1.5.3.2)$$

мұндағы, K – нольден өзге тұрақты, λ_j – (1.5.1.1) есептің оң меншікті мәндері.

Осылайша, (1.5.1.1) есептің оң меншікті мәндері белгілі болса, онда (1.5.2.7) мен (1.5.3.2) теңдіктерден келесі

$$M_{12} \frac{\xi^-(\lambda)}{2\lambda^4} + M_{13} \frac{\eta^+(\lambda)}{2\lambda^3} + M_{24} \frac{\eta^-(\lambda)}{2\lambda} + M_{34} \frac{\xi^+(\lambda)}{2} \equiv K \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^4}{\lambda_j^4} \right) \quad (1.5.3.3)$$

теңдігін аламыз. μ_j меншікті мәндері нақты λ_j меншікті мәндерімен тек жуық мәнінде сәйкес келеді. Осылайша, (1.5.3.3) теңдікті

$$M_{12} \frac{\xi^-(\lambda)}{2\lambda^4} + M_{13} \frac{\eta^+(\lambda)}{2\lambda^3} + M_{24} \frac{\eta^-(\lambda)}{2\lambda} + M_{34} \frac{\xi^+(\lambda)}{2} \approx K \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^4}{\mu_j^4} \right) \quad (1.5.3.4)$$

түрінде жаза аламыз.

Мысалы, (1.5.3.1) минорлар L_2 кеңістігіндегі

$$\frac{\xi^-(\lambda)}{2\lambda^4}, \frac{\eta^+(\lambda)}{2\lambda^3}, \frac{\eta^-(\lambda)}{2\lambda}, \frac{\xi^+(\lambda)}{2}$$

функциялар жүйесіне биортогональ функциялар жүйесіне түйіндесімен анықтауға болады. Минорларды табудың тағы бір әдісі (1.5.3.1) біз жақсы шартталған матрица әдісі деп атаймыз. Бұл әдісті биортогональды жүйе әдісіне қарағанда орындау оңайырақ. Ол жақсы анықталған жүйелік матрицасы бар сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің жуықталған сәйкестігінен (1.5.3.4) алуға негізделген.

λ параметріне төрт түрлі нақты z_k мәндерін $k=1,4$ бере отырып, төрт белгісізге қатысты төрт сызықтық алгебралық теңдеулер (1.5.3.4) жүйесін аламыз. Бұл жүйе белгісіз немесе нашар шартталған болуы мүмкін. Мұндай жағдай, атап айтқанда, z_k мәндері ретінде жеке λ_k мәндерін таңдағанда пайда болады. Дегенмен, z_k $k=1,4$ сандарын сәйкес жүйе матрицасы жақсы шартталған етіп таңдауға болады.

Компьютерлік есептеулер көрсеткендей, егер z_k $k=1,4$ сандары жүйелік матрицаның шарт нөмірі 10^{435} болатындай болса, онда жүйелік шешімдер (1.5.3.1) минорлардың нақты мәндерінен айтарлықтай кез келген s үшін ерекшеленеді. Сан шартталған кезде 10^7 , қанағаттанарлық нәтижелер қазірдің өзінде алынды: шамамен шешімнің дәлдігі s өскен сайын артады. $s=300$ үшін жуық шешімнің қателігі 10^{-1} . $s=500$ болғанда жуық шешімнің қателігі 10^{-2} .

1.5.4. Анықталмаған жүйе әдісі

Екінші әдіс-жақсы шартталған матрица әдісі—минорды анықтаудың әдістерінің біріншісіне қарағанда тиімдірек. Алайда жақсы шартталған матрицаның жетіспеушілігіне, оны қолдану үшін меншікті жиіліктердің үлкен санын білуді қажет ететіндігін жатқызуға болады. Төменде сипатталған үшінші

әдісте бұндай кемшіліктер жоқ. Оны пайдалану үшін тек үш меншікті жиілік қажет. Ол анықталмаған теңдеулер жүйесін шешуге негізделеді. Сондықтан оны анықталмаған жүйенің әдісі деп атайық.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (1.5.2.1) есептің меншікті мәндері деп айталық. Енді $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ мәндерін сипаттамалық анықтаушыға $\Delta(\lambda)$ ауыстырайық. Біздің есеп үшін $\Delta(\lambda)$ (1.5.2.7) түрінде болғандықтан, төрт белгісізден $M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34}$ үш біртекті алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$M_{12} \frac{\xi^-(\lambda_i)}{2\lambda_i^4} + M_{13} \frac{\eta^+(\lambda_i)}{2\lambda_i^4} + M_{24} \frac{\eta^-(\lambda_i)}{2\lambda_i^4} + M_{34} \frac{\xi^+(\lambda_i)}{2} = 0, \quad (1.5.4.1)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Бұл жүйенің шешімі шексіз көп. Егер жүйенің рангі 3-ке тең болса, онда анықталмаған минорлар бұл жүйеде дәл көбейтіндіге дейін табылады. Осы минорлардан белгісіз сызықты қабықша мен сәйкес шеткі жағдайларды белгілі сызықтық алгебра әдістерін қолдана отырып бірмәнді табуға болады. Қалай жасалатынын көрсетейік. $M_{12} \neq 0$ болсын, онда

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14}/a_{11} \\ 0 & 1 & a_{23}/a_{22} & 0 \end{vmatrix}.$$

Шыныменде, нақтыланған (1.5.1.3) теңдіктен A матрицасы үшін келесіні білдіреді

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \end{vmatrix},$$

демек, $M_{12} = a_{11}a_{22}$. Әрі қарай $M_{12} \neq 0$ болғандықтан, $a_{11} \neq 0$ және $a_{22} \neq 0$.

A матрицасының бірінші жолын $a_{11} \neq 0$ -ге, ал екінші жолын $a_{22} \neq 0$ -ге бөліп, матрица коэффициенттерінің шеткі жағдайын келесі түрде жазуға болатынын аламыз:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14}/a_{11} \\ 0 & 1 & a_{23}/a_{22} & 0 \end{vmatrix}.$$

Соңғы матрицада $M_{13} = a_{23}/a_{22}$, $M_{23} = -a_{14}/a_{11}$, $M_{12} = 1$ екенін ескерейік, сондықтан егер A матрицаның миноры $M_{12} = 1$ болса, онда матрицаның өзі келесідей болады:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -M_{24} \\ 0 & 1 & M_{13} & 0 \end{vmatrix}.$$

M_{12} мәні 1-ге тең болуы оңай, өткені координаттары $M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34}$ минорлар болатын бивектор тұрақты нөлдік емес көбейтіндіге дейін анықталған және біз оған оны бөле аламыз.

Сол сияқты, мысалы, егер $M_{13} = 1$ болса, онда

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -M_{34} \\ 0 & M_{12} & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Негізінде A матрицасының элементтері нөлдік, бірлік және сол матрицаның миноры түрінде болатынын да көрсетуге болады. Осындан теорема шығады.

Теорема 1.5.4.1. (шешімнің жалғыздығы туралы). Егер матрица жүйесінің (1.5.4.1) рангі 3-ке тең болса, онда $U_1(y) = 0, U_2(y) = 0$ есептерінің

(1.5.2.1) шеттік шарттарын табудың кері есебін шешу жалғыз.

Ескерту 1.5.4.1. Егер λ_i меншікті мәндері үлкен ауытқумен берілсе, онда (1.5.4.1) жүйеден табылған $M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34}$ сандары мүлде сол матрицаның миноры болмауы мүмкін. Еркін сандар жиынтығы матрицаның минорлары болу үшін, бұл сандар үшін Плюккер қатынасы деп аталатын белгілі бір қатынастар орындалуы керек. Мұнда біз аз ауытқумен шектелеміз. Бұл жағдайда (1.5.4.1) жүйеден табылған $M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34}$ сандары үшін Плюккердің арақатынасы орындалды деп санауға болады.

Ескерту 1.5.4.2. Шеттік шарттарды шамамен қалпына келтіру үшін нөлден ерекшеленетін алғашқы мәндерді қолдану қаншалықты маңызды? Шеттік шарттарды қалпына келтіру үшін мүмкін меншікті мәндердің (меншікті жиіліктердің) ақырлы жиынтығын пайдалану жеткілікті ме? Мысал келтіріп, көрсетейік, тіпті нөлден өзгеше меншікті мәндердің шексіз жиынтығын қолдану арқылы да шеттік шарттарды қалпына келтірудің бірегейлігіне әлі кепілдік бермейді. Есептің меншікті міндері

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0,$$

жетіншіден бастап, асимптотикалық түрде $\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ сандарымен сәйкес келеді, ал келесі есептің меншікті мәндері

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0,$$

жетіншіден бастап, асимптотикалық түрде $\tilde{\lambda}_k = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ сандарымен сәйкес келеді. Сондықтан $\{\lambda_k\}$ және $\{\tilde{\lambda}_k\}$ жиындары (егер нөмірлеуді ескермесек) асимптотикалық түрде сәйкес келеді. Алайда тиісті шеттік шарттар айтарлықтай ерекшеленеді. Осылайша, шеттік шарттарды қалпына келтірудің бірегейлігі үшін нөлден ерекшеленетін алғашқы мәндерді қолдану маңызды.

1.5.5. Анықталмаған жүйе әдісімен есепті шешудің мысалдары

1.5.4.1 теоремас сандық эксперименттерді шеттік шарттарды анықтау мәселесіне қолдану мүмкіндігін негіздейді. Осы эксперименттердің кейбірін келтірейік. Ескеретін нәрсе, барлық мысалдарда λ_m мәндерінде қысқа түрде үтірден кейінгі екі белгі, ал минорларда тек бүтін бөлігі жазылған. Жүргізілген сандық эксперименттерде, егер λ_m үшін абсолютті қателік 10^{-9} болса, онда минорлар үшін абсолютті қателік 10^{-6} -ға дейін артуы мүмкін.

Мысал 1.5.5.1. $\lambda_1 = 3,93$, $\lambda_2 = 7,07$, $\lambda_3 = 10,21$ — бұл стерженьнің иілу тербелістерінің ω_m , $m=1,2,3$ үш меншікті жиілігіне сәйкес келетін шеттік есептің (1.5.1.1) меншікті мәндері болсын. (1.5.1.1) спектрлік есептің шеттік шарттарын $U_1(y)=0$ және $U_2(y)=0$ табу қажет.

Белгісіз шеттік шарттарды табайық. Меншікті мәндерді $\lambda_1 = 3,93$, $\lambda_2 = 7,07$, $\lambda_3 = 10,21$ (1.5.4.1)-ге қояйық. Төрт белгісізден тұратын $M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34}$, анықталмаған үш теңдеулер жүйесін аламыз. Алынған теңдеулер жүйесінің шешімі C тұрақты көбейткішіне дейін келесі түрдегідей болады

$$M_{12} = 0, \quad M_{13} = 1, \quad M_{24} = 0, \quad M_{34} = 0.$$

Осы минорларға сәйкес келетін сызықтық қабықшаны табайық. $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ ол $\langle a_1, a_2 \rangle$ сызықтық қабықшаның қалаған еркін векторы болсын. Онда x векторының координаттары келесі шартты қанағаттандырады:

$$\text{rang} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 2 \quad (1.5.5.1)$$

$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ болғандықтан (1.5.5.1) шарты келесі теңдікпен сипатталады

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.5.5.2)$$

Анықтауыштарды (1.5.2.2) үшінші жолға жіктеу арқылы, келесіні аламыз:

$$x_1 \cdot M_{23} - x_2 \cdot M_{13} + x_3 \cdot M_{12} = 0, \quad x_1 \cdot M_{34} - x_3 \cdot M_{14} + x_4 \cdot M_{13} = 0$$

Тиісті M_{ij} мәндерін қою арқылы мынаны аламыз:

$$-x_2 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Сондықтан сызықтық қабықшаның қалаған еркін векторы $x = (x_1, 0, x_3, 0)^T$ түрінде болады. Осы сызықтық қабықшаның базистік векторлары ретінде, мысалға, $a_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ және $a_2 = (0, 0, 1, 0)^T$ векторларын алуға болады.

Сондықтан ізделетін шекті шарттар келесідей болады: $y(0) = 0, \quad y''(0) = 0$.

Бұл стерженьді тікелей бақылау мүмкін емес сол жақ ұшында еркін бекіту жүзеге асырылатынын білдіреді.

Жоғарыда келтірілген $\lambda_i (i=1,2,3)$ сандары шамамен $\cos \lambda sh\lambda - \sin \lambda ch\lambda = 0$ теңдеуінің алғашқы үш түбірімен сәйкес келеді.

Мысал: 1.5.5.2. $\lambda_1 = 5,60, \lambda_2 = 22,50, \lambda_3 = 61,86$ (1.5.1.1) шеттік есептің меншікті мәндері болсын. Белгісіз шеттік шарттарды табайық. Меншікті мәндерді $\lambda_1 = 3,93, \lambda_2 = 7,07, \lambda_3 = 10,21$ (1.5.4.1) теңдікке қояйық. Төрт белгісізден тұратын $M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34}$ анықталмаған үш теңдеулер жүйесін аламыз. Алынған теңдеулер жүйесінің шешімі C тұрақты көбейткішіне дейін келесі түрдегідей:

$$M_{12} = 0, \quad M_{13} = 1, \quad M_{24} = 0, \quad M_{34} = 1/5.$$

Осы минорларға сәйкес келетін сызықтық қабықшаны табайық. $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ ол $\langle a_1, a_2 \rangle$ сызықтық қабықшаның қалаған еркін векторы болсын. Онда x векторының координаттары келесі шартты қанағаттандырады:

$$\text{rang} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 2 \quad (1.5.5.3)$$

$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ болғандықтан (1.5.5.3) шарты келесі теңдікпен

сипатталады

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.5.5.4)$$

Анықтауыштарды (1.5.5.4) үшінші жолға жіктеу арқылы, келесіні аламыз:

$$x_1 \cdot M_{23} - x_2 \cdot M_{13} + x_3 \cdot M_{12} = 0, \quad x_1 \cdot M_{34} - x_3 \cdot M_{14} + x_4 \cdot M_{13} = 0$$

Тиісті M_{ij} мәндерін қою арқылы мынаны аламыз:

$$-x_2 = 0, \quad \frac{x_1}{5} + x_4 = 0.$$

Сондықтан сызықтық қабықшаның қалаған еркін векторы $x = (x_1, 0, x_3, -x_1/5)^T$ түрінде болады. Осы сызықтық қабықшаның базистік векторлары ретінде, мысалға, $a_1 = (1, 0, 0, -1/5)^T$ және $a_2 = (0, 0, 1, 0)^T$ векторларын алуға болады. Сондықтан ізделетін шеттік шарттар келесідей болады:

$$y(0) - \frac{1}{5} y'''(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

Бұл стерженьнің тікелей бақылау мүмкін емес сол жақ ұшында серпімді бекіту жүзеге асырылатынын білдіреді.

Жоғарыда келтірілген $\lambda_i (i=1,2,3)$ сандары шамамен $1 - ch\lambda \cos \lambda = 0$ теңдеуінің алғашқы үш түбірімен сәйкес келеді.

1.6 Стерженьді бекітудің түрі мен параметрлерін анықтау

Бұл параграфтарда шеттік шарттардың коэффициенттерінен тұратын матрицаны табу мәселесін шешудің екі жақтылығы туралы екі теорема дәлелденді. Бірінші теоремада бастапқы деректер ретінде барлық меншікті жиіліктер қолданылады, ал екіншісінде тек тоғыз меншікті жиіліктер қолданылады. Есепті шешудің екі жақтылығы дәл екі шешім бар екенін білдіреді. Сондай-ақ, стерженьнің екі ұшында бекіту түрі мен параметрлерін табу мәселесін шешудің тұрақтылығы дәлелденді. Бұл мәселені 9 меншікті жиілікте шешу әдісі ұсынылады. Әр түрлі бекіту түрлерін 9 меншікті мән бойынша қалпына келтірудің сандық эксперименттерінің нәтижелері келтірілген.

1.6.1. Кері есепті қою

Алдыңғы параграфта стержень ұштарының бірін меншікті жиіліктер бойынша бекіту түрі мен параметрлерін анықтау мәселесін зерттелінді. Бұл параграф алдыңғы параграфтан ерекшеленеді, өйткені стерженьнің екі ұшын бекіту түрі мен параметрлері анықталады. Бұл мәселені шешу қиынырақ, өйткені біріншіден, алдыңғы параграфтағыдай екі шеттік шартты емес, төртеуін табу керек, екіншіден, жалғыздығын емес, есепті шешудің екі жақтылығын дәлелдеу керек.

Стерженнің иілу тербелісі туралы есеп $u(x,t) = y(x) \cos \omega t$ алмастыру арқылы келесі спектрлік есепке дейін келтіріледі:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \quad (1.6.1.1)$$

$$U_1(y) = a_1 y(0) + a_4 y'''(0) = 0, \quad (1.6.1.2)$$

$$U_2(y) = -a_2 y'(0) + a_3 y''(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} U_3(y) &= -a_5 y(l) + a_8 y'''(l) = 0, \\ U_4(y) &= a_6 y'(l) + a_7 y''(l) = 0, \end{aligned} \quad (1.6.1.3)$$

Мұндағы, $\lambda^4 = \rho F \omega^2 / \alpha$, $\alpha = EI$. a_s , $s = \overline{1,8}$ коэффициенттері стерженьді бекіту түрін және серпімді бекіту параметрлерін сипаттайды. А дегеніміз (1.6.1.2), (1.6.1.3) формалардың a_s коэффициенттерінен тұратын матрица болсын; ал M_{ijkn} ($i, j, k, n = \overline{1,8}$) А матрицасының төртінші ретті минорлары:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_5 & 0 & 0 & a_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & a_7 & 0 \end{vmatrix}, \quad M_{ijkn} = \pm a_i a_j a_k a_n. \quad (1.6.1.4)$$

Енгізілген белгілеулерді ескере отырып кері есеп келесідей тұжырымдалады:

(1.6.1.1)–(1.6.1.3) есептің $U_l(y)$, $l = \overline{1,4}$ формаларының a_s , $s = \overline{1,8}$ коэффициенттері белгісіз; $\text{rang} A = 4$; (1.6.1.1)–(1.6.1.3) есептің λ_m меншікті мәндері белгілі. (1.6.1.4) түріндегі А матрицасын сызықты эквивалент матрицаға дейінгі дәлдікпен табу керек.

1.6.2. Шешімнің екі жақтылығы туралы теорема.

(1.6.1.1)–(1.6.1.3) есептерімен бірге келесі спектральді есепті қарастырамыз:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \quad (1.6.1.5)$$

$$\tilde{U}_1(y) = b_1 y(0) + b_4 y'''(0) = 0, \quad (1.6.1.6)$$

$$\tilde{U}_2(y) = -b_2 y'(0) + b_3 y''(0) = 0,$$

$$\tilde{U}_3(y) = -b_5 y(l) + b_8 y'''(l) = 0, \quad (1.6.1.7)$$

$$\tilde{U}_4(y) = b_6 y'(l) + b_7 y''(l) = 0,$$

(1.6.1.6), (1.6.1.7) формалардың b_s коэффициенттерінен жасалған матрицаны В арқылы, ал оның минорларын \tilde{M}_{ijkn} арқылы белгілейік. Онда

$$B = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_5 & 0 & 0 & b_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 & b_7 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tilde{M}_{ijkn} = \pm b_i b_j b_k b_n.$$

Келесі матрицаны енгізейік.

$$B^- = \begin{vmatrix} b_5 & 0 & 0 & b_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_6 & b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \end{vmatrix}$$

А, В, В⁻ матрицаларына сызықты эквивалент матрицалар класы $[A], [B], [B^-]$ болсын. Онда келесі теорема ақиқат.

Теорема 1.6.2.1. $\text{rang}A = \text{rang}B = 4$ болсын. (1.6.1.1)–(1.6.1.3) пен (1.6.1.5)–(1.6.1.7) есептердің меншікті мәндері олардың еселігімен тең болса, онда $[A] = [B]$ немесе $[A] = [B^-]$ болады.

Дәлелдеу. (1.6.1.1) теңдеудің жалпы шешімі

$$y(x, \lambda) = C_1 y_1(x, \lambda) + C_2 y_2(x, \lambda) + C_3 y_3(x, \lambda) + C_4 y_4(x, \lambda) \quad (1.6.1.9)$$

түрінде болады. Мұндағы, $\{y_n(x, \lambda)\}_{n=1,4}$ дегеніміз $y_n^{(k-1)} = \delta_{nk}$ шартын қанағаттандыратын (1.6.1.1) теңдеудің іргелі шешімдер жүйесі. Сонда

$$\begin{aligned} y_1(x, \lambda) &= \frac{\cos \lambda x + ch \lambda x}{2}, & y_2(x, \lambda) &= \frac{\sin \lambda x + sh \lambda x}{2\lambda}, \\ y_3(x, \lambda) &= \frac{-\cos \lambda x + ch \lambda x}{2\lambda^2}, & y_4(x, \lambda) &= \frac{-\sin \lambda x + sh \lambda x}{2\lambda^3}. \end{aligned} \quad (1.6.1.10)$$

$C_i, i = \overline{1,4}$ константаларды анықтау үшін (1.6.1.2), (1.6.1.3) шеттік шарттарды пайдаланамыз. (1.6.1.10) теңдікті (1.6.1.2), (1.6.1.3) шеттік шарттарға қою арқылы келесі теңдеу жүйесін аламыз:

$$C_1 U_l(y_1) + C_2 U_l(y_2) + C_3 U_l(y_3) + C_4 U_l(y_4) = 0, \quad l = \overline{1,4}.$$

C_i үшін нолдік емес шешім, сонда тек сонда ғана болады, егер сәйкес жүйенің анықтаушы нөлге тең болса, яғни

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix} \quad (1.6.1.11)$$

(1.6.1.11) түрлендіре отырып,

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= M_{1256} \left[\frac{f^-(\lambda)}{\lambda^4} \right] - (M_{2457} + M_{1368}) [q(\lambda)] + \\ &+ M_{3478} [\lambda^4 f^-(\lambda)] + (M_{1278} + M_{3456}) [f^+(\lambda)] + M_{2468} [\lambda^4 z(\lambda)] + \\ &+ M_{1357} \left[\frac{z(\lambda)}{\lambda^2} \right] + (M_{1268} - M_{2456}) \left[\frac{g^+(\lambda)}{\lambda} \right] + \\ &+ (M_{2478} - M_{3468}) [\lambda^3 g^+(\lambda)] + (M_{1356} - M_{1257}) \left[\frac{g^-(\lambda)}{\lambda^3} \right] + \\ &+ (M_{3457} - M_{1378}) [\lambda g^-(\lambda)] = 0 \end{aligned} \quad (1.6.1.12)$$

мұндағы

$$f^\pm = (1 \pm \cos \lambda ch \lambda) / 2, \quad z(\lambda) = \sin \lambda sh \lambda, \quad q(\lambda) = \cos \lambda ch \lambda, \quad g^\pm(\lambda) = (\cos \lambda sh \lambda \pm \sin \lambda ch \lambda) / 2$$

Дәл сол сияқты

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}(\lambda) = & \tilde{M}_{1256} \left[\frac{f^-(\lambda)}{\lambda^4} \right] - (\tilde{M}_{2457} + \tilde{M}_{1368}) [q(\lambda)] + \\
& + \tilde{M}_{3478} [\lambda^4 f^-(\lambda)] + (\tilde{M}_{1278} + \tilde{M}_{3456}) [f^+(\lambda)] + \tilde{M}_{2468} [\lambda^4 z(\lambda)] + \\
& + \tilde{M}_{1357} \left[\frac{z(\lambda)}{\lambda^2} \right] + (\tilde{M}_{1268} - \tilde{M}_{2456}) \left[\frac{g^+(\lambda)}{\lambda} \right] + \\
& + (\tilde{M}_{2478} - \tilde{M}_{3468}) [\lambda^3 g^+(\lambda)] + (\tilde{M}_{1356} - \tilde{M}_{1257}) \left[\frac{g^-(\lambda)}{\lambda^3} \right] + \\
& + (\tilde{M}_{3457} - \tilde{M}_{1378}) [\lambda g^-(\lambda)] = 0
\end{aligned} \tag{1.6.1.13}$$

Сызықтық дифференциалдық операторлар үшін жалпы теорияның қасиеттерінен $\Delta(\lambda)$ бүтін функция болып табылады. Сипаттамалық анықтауыш (1.6.1.12) – бұл бірінші ретті λ және $\Delta(\lambda) \neq 0$ бүтін функция болғандықтан, Адамар теоремасынан $\Delta(\lambda)$ функциясы нөлге дейін $Ce^{a\lambda}$ көбейткішіне дейін қалпына келтіріле аламыз, мұндағы a – кейбір нақты сан, ал C – нөлдік емес тұрақты. Әрі қарай, $\Delta(\lambda)$ функциясы жұп болғандықтан, $a = 0$ болады.

(1.6.1.1)–(1.6.1.3) есептің меншікті мәндері $\Delta(\lambda)$ анықтауыштың нөлдері, ал $\Delta(\lambda)$ функциясының нөлдік еселігі (1.6.1.1)–(1.6.1.3) есептің сәйкес меншікті мәнінің алгебралық еселігімен сәйкес келетіні белгілі.

(1.6.1.1)–(1.6.1.3) және (1.6.1.5)–(1.6.1.7) есептердің меншікті мәндері олардың алгебралық еселіктерімен сәйкес келгендіктен, (1.6.1.1)–(1.6.1.3) есептің сипаттамалық анықтауышы $\Delta(\lambda)$ және (1.6.1.5)–(1.6.1.7) есептердің сипаттамалық анықтауышы $\tilde{\Delta}(\lambda)$ келесі $\Delta(\lambda) \equiv C\tilde{\Delta}(\lambda)$ теңдігімен байланысады.

Осыдан, (1.6.1.12), (1.6.1.13) теңдіктерді ескеріп,

$$\begin{aligned}
& (M_{1256}C - \tilde{M}_{1256}) \left[\frac{f^-(\lambda)}{\lambda^4} \right] + (C(\tilde{M}_{2457} + \tilde{M}_{1368}) - (M_{2457} + M_{1368})) [q(\lambda)] + \\
& + (M_{3478} - C\tilde{M}_{3478}) [\lambda^4 f^-(\lambda)] + \\
& + ((M_{1278} + M_{3456}) - C(\tilde{M}_{1278} + \tilde{M}_{3456})) [f^+(\lambda)] + \\
& + (C\tilde{M}_{1357} - M_{1357}) \left[\frac{z(\lambda)}{\lambda^2} \right] + (M_{2468} - C\tilde{M}_{2468}) [\lambda^2 z(\lambda)] + \\
& + ((M_{1268} - M_{2456}) - C(\tilde{M}_{1268} - \tilde{M}_{2456})) \left[\frac{g^+(\lambda)}{\lambda} \right] + \\
& + ((M_{2478} - M_{3468}) - C(\tilde{M}_{2478} - \tilde{M}_{3468})) [\lambda^3 g^+(\lambda)] + \\
& + ((M_{1356} - M_{1257}) - C(\tilde{M}_{1356} - \tilde{M}_{1257})) \left[\frac{g^-(\lambda)}{\lambda^3} \right] + \\
& + ((M_{3457} - M_{1378}) - C(\tilde{M}_{3457} - \tilde{M}_{1378})) [\lambda g^-(\lambda)] \equiv 0.
\end{aligned} \tag{1.6.1.14}$$

теңдігін аламыз. Ал

$f^-(\lambda)/\lambda^4$, $\lambda^4/f^-(\lambda)$, $f^+(\lambda)$, $g^-(\lambda)/\lambda^3$, $\lambda^3 g^+(\lambda)$, $g^+(\lambda)/\lambda$, $\lambda g^-(\lambda)$, $\lambda^2 z(\lambda)$, $z(\lambda)/\lambda^2$, $q(\lambda)$ функциялары сызықты тәуелсіз. Олардың сызықты тәуелсіздігі [16] оқулықтағы теоремадан шығады. Осыдан және (1.6.1.14) теңдіктен,

$$M_{1256} = C\tilde{M}_{1256} \tag{1.6.1.15}$$

$$M_{1357} = C\tilde{M}_{1357} \quad (1.6.1.16)$$

$$M_{2468} = C\tilde{M}_{2468} \quad (1.6.1.17)$$

$$M_{3478} = C\tilde{M}_{3478} \quad (1.6.1.18)$$

$$M_{1356} - M_{1257} = C(\tilde{M}_{1257} - \tilde{M}_{1356}), \quad (1.6.1.19)$$

$$M_{1268} - M_{2456} = C(\tilde{M}_{1268} - \tilde{M}_{2456}), \quad (1.6.1.20)$$

$$M_{3457} - M_{1378} = C(\tilde{M}_{3457} - \tilde{M}_{1378}), \quad (1.6.1.21)$$

$$M_{2478} - M_{3468} = C(\tilde{M}_{2478} - \tilde{M}_{3468}), \quad (1.6.1.22)$$

$$M_{1278} + M_{3456} = C(\tilde{M}_{1278} - \tilde{M}_{3456}), \quad (1.6.1.23)$$

$$M_{1368} + M_{2457} = C(\tilde{M}_{1368} - \tilde{M}_{2457}). \quad (1.6.1.24)$$

теңдіктерін аламыз. Ары қарай дәлелдеу 5 жағдайға бөлінеді.

$M_{1256} \neq 0$, $M_{1257} \neq 0$, $M_{2468} \neq 0$, $M_{3478} \neq 0$, $M_{1256} = M_{1257} = M_{2468} = M_{3478} = 0$. Нақтылық үшін 4 жағдай $M_{3478} = C\tilde{M}_{3478} \neq 0$ орындалады деп есептейік. Қалған жағдайларға дәлелдеу дәл осылай жүзеге асады.

$M_{3478} = a_3a_4a_7a_8$, $\tilde{M}_{3478} = b_3b_4b_7b_8$ теңдіктерден A және B матрицалардың сәйкес $a_3a_4a_7a_8$ мен $b_3b_4b_7b_8$ элементтері нолден өзгеше. Онда A және B матрицаларын келесі түрде жазуға болады.

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Осы теңдік үшін A және B және (1.6.1.18) теңдіктен $C=1$ шығады. (1.6.1.16), (1.6.1.21) теңдіктерден $a_1a_5 = b_1b_5$, $a_1 + a_5 = b_1 + b_5$ шығады, осыдан Виет теоремасын пайдаланып,

$$a_1 = b_1, a_5 = b_5 \text{ немесе } a_1 = b_5, a_5 = b_1 \quad (1.6.1.25)$$

Дәл солай (1.6.1.17), (1.6.1.22) теңдіктерден

$$a_2 = b_2, a_6 = b_6 \text{ немесе } a_2 = b_2, a_6 = b_2 \quad (1.6.1.26)$$

шығады.

Осылайша 4 вариант пайда болады.

- 1) $a_1 = b_1, a_5 = b_5, a_2 = b_2, a_6 = b_6$;
- 2) $a_1 = b_5, a_5 = b_1, a_2 = b_6, a_6 = b_2$;
- 3) $a_1 = b_1, a_5 = b_5, a_2 = b_6, a_6 = b_2$;
- 4) $a_1 = b_5, a_5 = b_1, a_2 = b_2, a_6 = b_6$;

3 пен 4 жағдайлар 1 мен 2 жағдайлардың дербес жағдайы. Шынында, 3 жағдайда (1.6.1.23) немесе (1.6.1.24) теңдіктен

$$(a_1 - a_5)(a_2 - a_6) = 0. \quad (1.6.1.27)$$

Осыдан $a_1 - a_5 = 0, a_2 - a_6 = 0$. $a_1 - a_5 = 0$ теңдіктері 3 жағдайды 2 жағдайға $b_1 = a_1 = a_5 = b_5$ алып келеді. $a_2 - a_6 = 0$ теңдіктері 3 жағдайды 1 жағдайға $b_6 = a_2 = a_6 = b_2$ алып келеді. Дәл сол сияқты 4 жағдайды 1 мен 2 жағдайға алып келінеді.

Осылайша $M_{3478} \neq 0$ кезінде 1 мен 2 жағдай болатынын көрсеттік. Осыдан $[A] = [B]$ немесе $[A] = [B^-]$. Теорема дәлелденді.

1.6.3. Шешу әдісі.

Енді есепті шешу әдісін 9 меншікті мән бойынша шектік шарттардың анықтамаларымен сипаттайық. (1.6.1.1)–(1.6.1.3) есептің ω_m тоғыз жиілігіне сәйкес келетін $\lambda_m, m = \overline{1,9}$ шамалары белгілі болсын. λ_m мәндерін жиілік теңдеуіне (1.6.1.12) ауыстырайық, тоғыз алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\begin{aligned} & x_1 \left[\frac{f^-(\lambda_m)}{\lambda_m^4} \right] + x_2 [q(\lambda_m)] + x_3 [\lambda_m^4 f^-(\lambda_m)] + x_4 [f^+(\lambda_m)] + \\ & + x_5 \left[\frac{z(\lambda_m)}{\lambda_m^2} \right] + x_6 [\lambda_m^2 z(\lambda_m)] + x_7 \left[\frac{g^+(\lambda_m)}{\lambda_m} \right] + \\ & + x_8 [\lambda_m^3 g^+(\lambda_m)] + x_9 \left[\frac{g^-(\lambda_m)}{\lambda_m^3} \right] + x_{10} [\lambda_m g^-(\lambda_m)] = 0 \end{aligned} \quad (1.6.1.28)$$

Осы он белгісіз

$$\begin{cases} x_1 = M_{1256}, & x_2 = -(M_{2457} + M_{1368}), & x_3 = M_{3478}, \\ x_4 = M_{1278} + M_{3456}, & x_5 = -M_{1357}, & x_6 = M_{2468}, \\ x_7 = M_{1256} - M_{2456}, & x_8 = M_{2478} - M_{3478}, \\ x_9 = M_{1256} - M_{1257}, & x_{10} = M_{3457} - M_{1378}. \end{cases} \quad (1.6.1.29)$$

мәндеріне ие болады. Мұнда

$$f^\pm(\lambda) = (1 \pm \cos \lambda ch \lambda) / 2, \quad z(\lambda) = \sin \lambda sh \lambda, \quad q(\lambda) = \cos \lambda ch \lambda, \quad g^\pm(\lambda) = (\cos \lambda sh \lambda \pm \sin \lambda ch \lambda) / 2.$$

Егер (1.6.1.28) жүйенің рангі 9-ға тең болса, онда (1.6.1.28) теңдеу жүйесі тұрақты көбейткішке дейінгі дәлдікпен x_1, x_2, \dots, x_{10} жалғыз шешімі болады. x_1, x_2, \dots, x_{10} мәндері бойынша (1.6.1.29) теңдіктегі белгісіз минорлар табылады. Ары қарай белгісіз A матрицасы теорема дәлеліндей тікелей есептеу арқылы жүргізіледі. Осылайша келесі теорема дәлелденді.

Теорема 1.6.3.1. *Егер (1.6.1.28) матрицалар жүйесінің рангі 9-ға тең болып, (1.6.1.1)–(1.6.1.3) есептердің λ_m спектрінің меншікті мәндері болса, онда (1.6.1.2), (1.6.1.3) шеттік шарттарды қалпына келтірудің кері есебінің шешімі осы 9 меншікті мән бойынша екі жақты болады.*

1.6.4. Шешімнің орнықтылығы

Жиілік өлшегіштердің көмегімен меншікті жиіліктер кейбір қателіктермен анықталатындықтан, салыстырмалы түрде аз шешімнің тұрақтылығы туралы мәселе туындайды. Шешімнің орнықтылығын көрсетейік. Ол үшін B^-

матрицасының элементтерін b_s^- арқылы белгілейміз, және B^- және B матрицалардың элементтері келесі түрде байланысқан деп есептейміз. $b_1^- = b_5, b_2^- = b_6, b_3^- = b_7, b_4^- = b_8, b_5^- = b_1, b_6^- = b_2, b_7^- = b_3, b_8^- = b_4$. Келесі теорема орынды.

Теорема 1.6.4.1. $\lambda_m, \mu_m, m = \overline{1,9}$ мәндері (1.6.1.1)–(1.6.1.3) және (1.6.1.5)–(1.6.1.7) есептердің меншікті мәндері болсын, және сәйкесінше $\text{rang}A = \text{rang}B = 4$.

Онда кез-келген $\varepsilon > 0$ үшін $\sum_{m=1}^9 |\lambda_m - \mu_m| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын

$\delta > 0, A \in [A], B \in [B], B^- \in [B^-]$ табылады, және $\sum_{s=1}^8 |a_s - b_s| < \varepsilon$ немесе $\sum_{s=1}^8 |a_s - b_s^4| < \varepsilon$

теңдіктері орындалады.

Дәлелдеу. (1.6.1.28) матрицалар жүйесінің рангі 9-ға тең болса, және (1.6.1.1)–(1.6.1.3) есептің $\{\lambda_m\}$ спектрінің тоғыз меншікті мәндері келесідей болса онда (1.6.1.28) теңдеулер жүйесінің шешімі

$$x_n = F_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9) \quad (1.6.1.30)$$

түрінде болады. Мұндағы $F_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9), n = \overline{1,10}$ ол $f^\pm(\lambda_m), g^\pm(\lambda_m), z(\lambda_m), q(\lambda_m)$ функцияларынан ақырлы алгебралық есептеулер арқылы алынған функциялардан құралған.

Дәл солай (1.6.1.28) матрицалар жүйесінің рангі 9-ға тең болса, онда (1.6.1.5)–(1.6.1.7) есептің меншікті мәндері (1.3.28) теңдеулер жүйесінің шешімі

$$\tilde{x}_n = F_n(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_9) \quad (1.6.1.31)$$

(1.6.1.10) есептің шешімінің үзіліссіздігі ескере отырып (1.6.1.31) теңдеу λ_m параметрлері $f^\pm(\lambda_m), g^\pm(\lambda_m), z(\lambda_m), q(\lambda_m)$ функциялары λ_m үзіліссіз функциялардың айырмасы, қосындысы, көбейтіндісі түрінде жазыла алады. Сондықтан, $F_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9), n = \overline{1,10}$ функциялары да λ_m бойынша үзіліссіз бола алады. Онда

$$|x_n - \tilde{x}_n| = |F_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9) - F_n(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_9)| < \varepsilon_n \quad (1.6.1.32)$$

жәнеде $\sum_{k=1}^9 |\lambda_m - \mu_m| < \delta$ орындалады.

Табылған x_1, x_2, \dots, x_{10} мәндері бойынша (1.6.1.29) теңдіктегі белгісіз минорлар табылады, және белгісіз A матрицасы теорема дәлеліндей тікелей есептеу арқылы анықталады, (1.6.1.32) теңдікті ескерсек

$\sum_{s=1}^8 |a_s - b_s| < \varepsilon$ немесе $\sum_{s=1}^8 |a_s - b_s^-| < \varepsilon$ мәндерін $\sum_{m=1}^9 |\lambda_m - \mu_m| < \delta$ теңсіздігі

орындалғанда аламыз. Теорема дәлелденді.

1.7. Жалпы шекаралық шарттардың идентификациясы

Алдыңғы пункттерде кейбір механикалық мағынасы бар шекаралық шарттарды көлденең тербелістердің меншікті жиіліктері арқылы идентификациялау сұрақтары қарастырылды. Бұл пункте жалпы екі нүктелі шекаралық шарттарды меншікті жиіліктері бойынша бірімәнді анықтауға болатындығы немесе болмайтындығы зерттеледі. Бұл пункттің нәтижелері

теориялық жағынан маңызды сипатқа ие. Екінші жағынан жалпы идентификациялау [55] проблемасында қандай аналитикалық қиындықтармен кездесетінімізді байқауға болады.

$L_2(0,1)$ функционалдық кеңістігінде K дифференциалдық операторды қарастырайық. Ол оператор $y \in D(K) \equiv \{y \in W_2^4[0,1]: U_j(y) = 0, j = 1,4\}$ анықталу облысында

$$Ky \equiv y^{(4)}(x) + p_2(x)y^{(2)}(x) + p_1(x)y^{(1)}(x) + p_0(x)y(x), \quad 0 < x < 1$$

дифференциалдық өрнекпен сипатталсын. Мұндағы дифференциалдық өрнектің $p_k(x)$ коэффициенттері $[0,1]$ кесіндісінде k рет үзіліссіз дифференциалданатын функциялар. $U_j(y)$ шекаралық формалар келесі түрде жазылады:

$$U_j(y) = \sum_{\nu=1}^4 \alpha_{j\nu} y^{(\nu-1)}(0) + \sum_{\nu=1}^4 \beta_{j\nu} y^{(\nu-1)}(1).$$

Мұндағы $\alpha = (\alpha_{j\nu}), \beta = (\beta_{j\nu})$ сандық матрицалары 4×4 өлшемді, және де шекаралық коэффициенттер $A \equiv (\alpha, \beta)$ матрицасының рангі 4-ке тең.

K операторымен қатар \tilde{K} операторын қарастырамыз. \tilde{K} операторы K операторына пайда болады, егер шекаралық A матрицаны басқа шекаралық \tilde{A} матрицасына аустырсак. Бұл тараудың негізгі мақсаты келесі сұраққа жауап беру. Егер K операторының меншікті мәндері \tilde{K} операторының меншікті мәндерімен пара-пар болса, онда A және \tilde{A} матрицаларының өзара қандай ұқсастықтары бар? Бұл жағдайда K және \tilde{K} операторлары изоспектралды операторлар деп аталады [26]. Бұл мәселе Марк Катстың әйгілі сұрағы “Can one hear the shape of a drum?” [27] қатысты.

$$y^{(4)}(x) + \sum_{k=0}^2 p_k(x)y^{(k)}(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1.7.1)$$

теңдеуінің Коши шартын

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1, & y_1(0) &= 0, \\ y_1'(0) &= 1, & y_2'(0) &= 1, \\ y_1''(0) &= 1, & y_2''(0) &= 0, \\ y_1'''(0) &= 1, & y_2'''(0) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3(0) &= 0, & y_4(0) &= 0, \\ y_3'(0) &= 0, & y_4'(0) &= 0, \\ y_3''(0) &= 1, & y_4''(0) &= 0, \\ y_3'''(0) &= 0, & y_4'''(0) &= 1 \end{aligned}$$

қанағаттандыратын іргелі шешімдер жүйесін белгілейік.

$\lambda = \rho^4$ болса, онда оның іргелі шешімдер жүйесі келесі түрде жазылады:

$$y_4(x, \lambda) = \frac{1}{2\rho^3} (\sinh \rho x - \sin \rho x)[1], \quad y_{4-k}(x, \lambda) = \frac{d^k}{dx^k} y_4(x, \lambda), \quad k = 1,2,3,$$

мұндағы $[1] = 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \rho \rightarrow \infty$.

М.А.Наймарк [28] монографиясы бойынша $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda), y_3(x, \lambda), y_4(x, \lambda)$ – бүтін функциялар болады. Ф.Аткинсон [29] монографиясында сипаттамалық анықтауыш келесідей енгізілген:

$$\Delta(\lambda) = \det[\alpha + \beta W(1, \lambda)],$$

мұндағы $W(1, \lambda)$ – Вронский матрицасы

$$W(1, \lambda) = \begin{bmatrix} y_1(1, \lambda) & y_2(1, \lambda) & y_3(1, \lambda) & y_4(1, \lambda) \\ y_1'(1, \lambda) & y_2'(1, \lambda) & y_3'(1, \lambda) & y_4'(1, \lambda) \\ y_1''(1, \lambda) & y_2''(1, \lambda) & y_3''(1, \lambda) & y_4''(1, \lambda) \\ y_1'''(1, \lambda) & y_2'''(1, \lambda) & y_3'''(1, \lambda) & y_4'''(1, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Ф.Р.Гантмахердің [30] монографиясы бойынша матрицалардың қосындысының анықтауышын есептейміз.

Мұндағы $W(1, \lambda)$ матрицасы $x=1$ болғандағы Вронский матрицасы. Кез-келген $x \in (0, 1)$ Вронский матрицасы келесі түрде сипатталады:

$$W(x, \lambda) = \begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_3(x, \lambda) & y_4(x, \lambda) \\ y_1'(x, \lambda) & y_2'(x, \lambda) & y_3'(x, \lambda) & y_4'(x, \lambda) \\ y_1''(x, \lambda) & y_2''(x, \lambda) & y_3''(x, \lambda) & y_4''(x, \lambda) \\ y_1'''(x, \lambda) & y_2'''(x, \lambda) & y_3'''(x, \lambda) & y_4'''(x, \lambda) \end{bmatrix}$$

Айта кетейік, $W(0, \lambda) = E$ – бірлік матрица. Ары қарай $p_2, p_1, p_0 = 0$ деп есептеген кездегі нәтижелерді келтіреміз. Егер бұл коэффициенттер нолден өзгеше болса [55–57], онда біз келтірген қорытындылар асимптотикалық тұрғыда орындалады.

(1.7.1) теңдеуінің $z(x, \lambda)$ және $y(x, \lambda)$ екі шешімдері үшін Лагранж теңсіздігі [28]

$$0 = \int_0^1 (y^{(4)}(x)z(x) - y(x)z^{(4)}(x))dx = Y^T(1) \cdot J \cdot Z(1) - Y^T(0) \cdot J \cdot Z(0)$$

немесе

$$Y^T(1) \cdot J \cdot Z(1) = Y^T(0) \cdot J \cdot Z(0), \quad (1.7.2)$$

орынды. Мұндағы

$$Y^T(X) = (y(x, \lambda), y'(x, \lambda), y''(x, \lambda), y'''(x, \lambda)),$$

$$Z^T(X) = (z(x, \lambda), z'(x, \lambda), z''(x, \lambda), z'''(x, \lambda)),$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1.7.1) теңдеуінің қандайда бір іргелі шешімдер жүйесі $z_1(x, \lambda), z_2(x, \lambda), z_3(x, \lambda), z_4(x, \lambda)$ болсын. Іргелі шешімдер жүйесіне сәйкес келетін Вронский матрицасын $\tilde{W}(x, \lambda)$ арқылы белгілейік. Онда (1.7.2) теңдіктен келесі матрицалық теңдік шығады:

$$Y^T(1, \lambda) \cdot J \cdot \tilde{W}(1, \lambda) = J \cdot \tilde{W}(0, \lambda). \quad (1.7.3)$$

$J \tilde{W}(0, \lambda) = E$ немесе $\tilde{W}(0, \lambda) = J^{-1}$ теңдігі орындалатындай

$z_1(x, \lambda), z_2(x, \lambda), z_3(x, \lambda), z_4(x, \lambda)$ іргелі шешімдер жүйесін таңдайық.

Осыдан

$$z_1(x, \lambda) = -y_4(x, \lambda), \quad z_2(x, \lambda) = y_3(x, \lambda), \quad z_3(x, \lambda) = -y_2(x, \lambda), \quad z_4(x, \lambda) = y_1(x, \lambda)$$

теңдігі шығады.

Сәйкесінше, (1.7.3) матрицалық теңдіктен

$$(W(1, \lambda))^{-1} = \tilde{W}^T(1, \lambda) \cdot J^T = \begin{bmatrix} y_4'''(1, \lambda) & -y_4''(1, \lambda) & y_4'(1, \lambda) & -y_4(1, \lambda) \\ -y_3'''(1, \lambda) & y_3''(1, \lambda) & -y_3'(1, \lambda) & y_3(1, \lambda) \\ y_2'''(1, \lambda) & -y_2''(1, \lambda) & y_2'(1, \lambda) & -y_2(1, \lambda) \\ -y_1'''(1, \lambda) & y_1''(1, \lambda) & -y_1'(1, \lambda) & y_1(1, \lambda) \end{bmatrix}$$

теңдігі орындалады.

$\det W(1, \lambda) = 1$ болғандықтан, онда $(W(1, \lambda))^{-1}$ кері матрицаның элементтері $W(1, \lambda)$ матрицасының элементтерінің алгебралық толықтауышына [56] сәйкес келеді:

Осыдан үшінші ретті минорлар үшін келесі теңдік орынды.

$$\begin{aligned} W \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} &= y_4'''(1, \lambda), & W \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} &= y_3'''(1, \lambda), & W \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} &= y_2'''(1, \lambda), & W \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} &= y_1'''(1, \lambda), \\ W \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} &= y_4''(1, \lambda), & W \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} &= y_3''(1, \lambda), & W \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} &= y_2''(1, \lambda), & W \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} &= y_1''(1, \lambda), \\ W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} &= y_4'(1, \lambda), & W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} &= y_3'(1, \lambda), & W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} &= y_2'(1, \lambda), & W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} &= y_1'(1, \lambda), \\ W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} &= y_4(1, \lambda), & W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} &= y_3(1, \lambda), & W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} &= y_2(1, \lambda), & W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} &= y_1(1, \lambda), \end{aligned}$$

Мұндағы $W \begin{pmatrix} s & m & n \\ i & j & k \end{pmatrix}$ дегеніміз $W(1, \lambda)$ Вронский матрицасының миноры. Ол $1 \leq i \leq j \leq k \leq 4$ номерлі бағандар мен $1 \leq s \leq m \leq n \leq 4$ номерлі жолдардың қиылысуына сәйкес келеді. Тағы да бізге $W(1, \lambda)$ Вронский матрицасының екінші ретті минорлары керек.

$$W \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \{2 + \cos(1+i)\rho + \cos(1-i)\rho\},$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{\rho}{4} \{-(1+i)\sin(1+i)\rho - (1-i)\sin(1-i)\rho\},$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{i\rho^2}{4} \{\cos(1-i)\rho - \cos(1+i)\rho\}$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\rho} \{(1-i)\sin(1+i)\rho + (1+i)\sin(1-i)\rho\}$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{\rho}{4} \{-(1+i)\sin(1+i)\rho + (1+i)\sin(1-i)\rho\}$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} W \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{i}{4\rho^2} \{\cos(1-i)\rho - \cos(1+i)\rho\}$$

$$\begin{aligned}
W\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} &= W\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \{ \cos(1+i)\rho + \cos(1-i)\rho \}, \\
W\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} &= W\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \{ -2 + \cos(1+i)\rho + \cos(1-i)\rho \}, \\
W\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} &= W\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\rho^3} \{ (1+i)\sin(1+i)\rho + (1-i)\sin(1-i)\rho \}, \\
W\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= \frac{\rho^4}{4} (2 - \cos(1+i)\rho - \cos(1-i)\rho), \\
W\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} &= \frac{1}{4\rho^4} \{ 2 - \cos(1+i)\rho - \cos(1-i)\rho \}, \\
W\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= W\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{\rho^3}{4} \{ -(1-i)\sin(1+i)\rho - (1+i)\sin(1-i)\rho \}
\end{aligned}$$

Енді сипаттамалық анықтауыштар $\Delta(\lambda) = \det(\alpha + \beta W(1, \lambda))$ есептейік. α матрицасының бағандарын $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ арқылы белгілейік, яғни

$$\alpha = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4).$$

$\beta W(1, \lambda)$ матрицасының бағандарын $\beta Y_1, \beta Y_2, \beta Y_3, \beta Y_4$ арқылы белгілейік, яғни

$$\beta W(1, \lambda) = (\beta Y_1 \ \beta Y_2 \ \beta Y_3 \ \beta Y_4)$$

мұндағы $Y_k = Y_k(1, \lambda) = (y_k(1, \lambda), y'_k(1, \lambda), y''_k(1, \lambda), y'''_k(1, \lambda))^T$.

Онда екі матрицаның қосындысының анықтауышы

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) &= \det \alpha + \det(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta Y_4) + \det(\alpha_1 \alpha_2 \beta Y_3 \alpha_4) + \det(\alpha_1 \beta Y_2 \alpha_3 \alpha_4) + \det(\beta Y_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) + \\
&+ \det(\alpha_1 \alpha_2 \beta Y_3 \beta Y_4) + \det(\alpha_1 \beta Y_2 \alpha_3 \beta Y_4) + \det(\beta Y_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta Y_4) + \det(\alpha_1 \beta Y_2 \beta Y_3 \alpha_4) + \det(\beta Y_1 \alpha_2 \beta Y_3 \alpha_4) + \\
&+ \det(\beta Y_1 \beta Y_2 \alpha_3 \alpha_4) + \det(\beta Y_1 \beta Y_2 \beta Y_3 \alpha_4) + \det(\beta Y_1 \beta Y_2 \alpha_3 \beta Y_4) + \det(\beta Y_1 \alpha_2 \beta Y_3 \beta Y_4) + \det(\alpha_1 \beta Y_2 \beta Y_3 \beta Y_4) + \det \beta.
\end{aligned}$$

формуласымен анықталады.

$\det(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \beta Y_4)$ есептеу кезінде Бине–Коши формуласын қолданамыз

$$\begin{aligned}
\det(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \beta Y_4) &= -\beta_1 Y_4 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \beta_2 Y_4 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \beta_3 Y_4 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \beta_4 Y_4 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \\
&= \left\{ -\beta_1 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \beta_3 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \beta_4 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\} Y_4.
\end{aligned}$$

Мұнда β матрицасының жолдарын $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ арқылы белгілейік, яғни $\beta^T = (\beta_1^T, \beta_2^T, \beta_3^T, \beta_4^T)$.

Дәл солай

$$\begin{aligned}
\det(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \beta Y_3 \ \alpha_4) &= \left\{ \beta_1 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \beta_2 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \beta_3 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \beta_4 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\} Y_3, \\
\det(\alpha_1 \ \beta Y_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4) &= \left\{ -\beta_1 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \beta_3 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta_4 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} Y_2, \\
\det(\beta Y_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4) &= \left\{ \beta_1 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \beta_2 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta_3 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \beta_4 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} Y_1.
\end{aligned}$$

есептеледі.

$\det(\beta Y_1 \beta Y_2 \beta Y_3 \alpha_4)$ есептеу кезінде алдымен баған бойынша жіктеуге Лаплас

$$\begin{aligned}
\det(\beta Y_1 \ \alpha_2 \ \beta Y_3 \ \beta Y_4) &= -\alpha_{21} \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (Y_1 \ Y_3 \ Y_4) \right\} + \alpha_{22} \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (Y_1 \ Y_3 \ Y_4) \right\} - \\
&- \alpha_{23} \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (Y_1 \ Y_3 \ Y_4) \right\} + \alpha_{24} \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} (Y_1 \ Y_3 \ Y_4) \right\} = \\
&= W \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ -\alpha_{21} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{22} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{23} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{24} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
&+ W \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ -\alpha_{21} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{22} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{23} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{24} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
&+ W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ -\alpha_{21} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{22} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{23} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{24} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
&+ W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ -\alpha_{21} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_{22} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \alpha_{23} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_{24} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(\alpha_1 \ \beta Y_2 \ \beta Y_3 \ \beta Y_4) &= \alpha_{11} \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (Y_2 \ Y_3 \ Y_4) \right\} - \alpha_{12} \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (Y_2 \ Y_3 \ Y_4) \right\} + \\
&+ \alpha_{13} \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (Y_2 \ Y_3 \ Y_4) \right\} - \alpha_{14} \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} (Y_2 \ Y_3 \ Y_4) \right\} = \\
&= W \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ \alpha_{11} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{12} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{13} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{14} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
&+ W \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ \alpha_{11} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{12} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{13} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{14} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
&+ W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ \alpha_{11} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{12} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{13} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{14} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
&+ W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ \alpha_{11} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \alpha_{12} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_{13} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \alpha_{14} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

$\det(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \beta Y_3 \ \beta Y_4)$ есептеу кезінде алдымен екі баған бойынша жіктеу туралы Лаплас теоремасын пайдаланамыз, одан кейін Бине–Коши формуласын қолданамыз:

$$\begin{aligned}
\det(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \beta Y_3 \ \beta Y_4) &= (-1)^{1+2+1+2} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (Y_3 \ Y_4) \right\} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (Y_3 \ Y_4) \right\} + \\
&+ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} (Y_3 \ Y_4) \right\} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (Y_3 \ Y_4) \right\} - \alpha \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (Y_3 \ Y_4) \right\} - \\
&- \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} (Y_3 \ Y_4) \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +W \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. - \alpha \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} + \\
& +W \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. - \alpha \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
& +W \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. - \alpha \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\} + \\
& +W \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. - \alpha \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
& +W \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. - \alpha \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Жоғарыда келтірген өрнектерді ескере отыра сипаттамалық анықтауышты келесі түрде жазамыз

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) = & R_0 + R_1 y_1(1, \lambda) + R_2 y_2(1, \lambda) + R_3 y_3(1, \lambda) + R_4 y_4(1, \lambda) + R_5 \lambda y_2(1, \lambda) + \\
& + R_6 \lambda y_3(1, \lambda) + R_7 \lambda y_4(1, \lambda) + R_8 \frac{1}{4} \{ \cos(1+i)\rho + \cos(1-i)\rho \} + \\
& + R_9 \frac{i\rho^2}{4} \{ \cos(1-i)\rho - \cos(1+i)\rho \} + R_{10} \frac{1}{4\rho} \{ (1-i)\sin(1+i)\rho + (1+i)\sin(1-i)\rho \} + \\
& + R_{11} \frac{\rho}{4} \{ -(1+i)\sin(1+i)\rho + (1+i)\sin(1-i)\rho \} + R_{12} \left\{ -\frac{i}{4\rho^2} \{ \cos(1-i)\rho - \cos(1+i)\rho \} \right\} \\
& + R_{13} \frac{1}{4\rho^3} \{ (1+i)\sin(1+i)\rho + (1-i)\sin(1-i)\rho \} + R_{14} \frac{\rho^4}{4} (2 - \cos(1+i)\rho - \cos(1-i)\rho) + \\
& + R_{15} \frac{1}{4\rho^4} \{ 2 - \cos(1+i)\rho - \cos(1-i)\rho \} + R_{16} \frac{\rho^3}{4} \{ -(1-i)\sin(1+i)\rho - (1+i)\sin(1-i)\rho \} + \\
& + R_{17} \frac{\rho}{4} \{ -(1+i)\sin(1+i)\rho - (1-i)\sin(1-i)\rho \}
\end{aligned}$$

МҰНДАҒЫ

$$\begin{aligned}
R_1 = & \left\{ \alpha_{11} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{12} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{13} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{14} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \right. \\
& - \alpha_{21} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{22} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{23} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{24} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \\
& + \alpha_{31} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{32} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{33} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{34} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \\
& + - \alpha_{41} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_{42} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \alpha_{43} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_{44} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \left. \right\} + \\
& + \left\{ -\beta_{14} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \beta_{24} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \beta_{34} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \beta_{44} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\} + \\
& + \left\{ \beta_{13} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \beta_{23} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \beta_{33} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \beta_{43} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
& + \left\{ -\beta_{12} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta_{22} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \beta_{32} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta_{42} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
& + \left\{ \beta_{11} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \beta_{21} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta_{31} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \beta_{41} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Ал қалған R_0, R_2, \dots, R_{18} коэффициенттер 1-ші қосымшада шекаралық α, β матрицалардың минорлары арқылы көрсетілген. Мұндағы α, β шекаралық матрицалар, ал R_0, R_2, \dots, R_{18} -лер осылардың минорлары арқылы өрнектеледі. Олай болса, келесі тұжырымға келеміз.

Теорема 1.7.1. p_2, p_1, p_0 функциялар $[0,1]$ кесіндісінде анықталған және тегіс функциялар болсын, ал α және β дегеніміз 4×4 өлшемді сандық матрица болсын. Онда

$$Ky \equiv y^{(4)}(x) + p_2(x)y^{(2)}(x) + p_1(x)y^{(1)}(x) + p_0(x)y(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1.7.3)$$

операторына келесі анықталу облысымен анықталған

$$U_j(y) = \sum_{\nu=1}^4 \alpha_{j\nu} y^{(\nu-1)}(0) + \sum_{\nu=1}^4 \beta_{j\nu} y^{(\nu-1)}(1) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

сәйкес сипаттамалық анықтаушы

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) = & R_0 + R_1 y_1(1, \lambda) + R_2 y_2(1, \lambda) + R_3 y_3(1, \lambda) + R_4 y_4(1, \lambda) + R_5 \lambda y_2(1, \lambda) + \\
& + R_6 \lambda y_3(1, \lambda) + R_7 \lambda y_4(1, \lambda) + R_8 \frac{1}{4} \{ \cos(1+i)\rho + \cos(1-i)\rho \} + \\
& + R_9 \frac{i\rho^2}{4} \{ \cos(1-i)\rho - \cos(1+i)\rho \} + R_{10} \frac{1}{4\rho} \{ (1-i)\sin(1+i)\rho + (1+i)\sin(1-i)\rho \} + \\
& + R_{11} \frac{\rho}{4} \{ -(1+i)\sin(1+i)\rho + (1+i)\sin(1-i)\rho \} + R_{12} \left\{ -\frac{i}{4\rho^2} \{ \cos(1-i)\rho - \cos(1+i)\rho \} \right\} \\
& + R_{13} \frac{1}{4\rho^3} \{ (1+i)\sin(1+i)\rho + (1-i)\sin(1-i)\rho \} + R_{14} \frac{\rho^4}{4} (2 - \cos(1+i)\rho - \cos(1-i)\rho) + \\
& + R_{15} \frac{1}{4\rho^4} \{ 2 - \cos(1+i)\rho - \cos(1-i)\rho \} + R_{16} \frac{\rho^3}{4} \{ -(1-i)\sin(1+i)\rho - (1+i)\sin(1-i)\rho \} + \\
& + R_{17} \frac{\rho}{4} \{ -(1+i)\sin(1+i)\rho - (1-i)\sin(1-i)\rho \}
\end{aligned}$$

теңдігімен өрнектеледі.

1.8. Оператордың меншікті мәндері арқылы шекаралық шарттарын бірмәнді қалыпқа келтіру

Бұл бөлімде меншікті мәндері туралы есепті

$$y^{(4)}(x) + p_2(x)y^{(2)}(x) + p_1(x)y^{(1)}(x) + p_0(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1.8.1)$$

$$U_j(y) = \sum_{\nu=1}^4 \alpha_{j\nu} y^{(\nu-1)}(0) + \sum_{\nu=1}^4 \beta_{j\nu} y^{(\nu-1)}(1) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (1.8.2)$$

қарастырамыз. Бізге келесі келесі $A = (\alpha, \beta)$ шекаралық сандық матрицасын енгізген тиімді. Бұл A матрицасының өлшемі 4×8 өлшемді болады. (1.8.1)–(1.8.2) есептің барлық меншікті мәндерін олардың еселігін ескере отырып $\text{Spec } K(A)$ деп белгілейміз. Қос A_1 және A_2 матрицаларды изоспетралды матрица деп атаймыз, егер $\text{Spec } K(A_1) = \text{Spec } K(A_2)$ теңдігі орындалса. Оларға сәйкес есептер изоспетралды есептер деп аталады. Бұл пунктың мақсаты – A_1 және A_2 матрицалар қандай болуы керек егер $\text{Spec } K(A_1) = \text{Spec } K(A_2)$? Аталған сұрақ Марк Кацтың әйгілі проблемасымен байланысты. 1966 жылы Марк Кац [27] өзінің әйгілі проблемасын келесі сұрақпен “Can one hear the shape of a drum?” тұжырымдаған.

Теорема 1.8.1. *Егер $\text{Spec } K(A_1) = \text{Spec } K(A_2)$, онда сәйкес сипаттамалық анықтауыштардың $\Delta_1(\lambda)$ және $\Delta_2(\lambda)$ коэффициенттері тең болуы керек. Басқаша айтқанда, $R_j(A_1) = R_j(A_2)$, $j = 0, 1, \dots, 18$, мұндағы $\{R_j\}$ коэффициенттері қосымша 1-де көрсетілген.*

Теорема 1.8.1. дәлелдеуі. Егер $\text{Spec } K(A_1) = \text{Spec } K(A_2)$ онда сәйкес сипаттамалық анықтауыштарда функция ретінде тең болады. Демек $\Delta_1(\lambda) \equiv \Delta_2(\lambda)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Олай болса алдыңғы Теорема 1.7.1 ден қажетті тұжырымға көз жеткіземіз.

Теорема 1.8.2. *Егер $R_j(A_1) = R_j(A_2)$, $j = 0, 1, \dots, 18$ коэффициенттері өзара тең болса, онда $\text{Spec } K(A_1) = \text{Spec } K(A_2)$ теңдігі ақиқат болады.*

Теорема 1.8.2. дәлелдеуі. Егер $R_j(A_1) = R_j(A_2)$, $j = 0, 1, \dots, 18$ орындалса, онда сәйкес сипаттамалық анықтауыштар функция ретінде тең болады. Демек $\Delta_1(\lambda) \equiv \Delta_2(\lambda)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Олай болса, сипаттамалық анықтауыштардың нольдері еселіктерін ескере отырып қарастырғанда өзара сәйкес келеді. Сипаттамалық анықтауыштардың нольдері (1.8.1)–(1.8.2) меншікті мәндері болатындығы ақиқат. Сонымен қажетті тұжырым толық дәлелденді.

2. Граф бойындағы тербелістер идентификациясы

Бұл бөлімде графтың бойындағы дифференциалдық операторлар үшін қойылған спектралды кері есептер қарастырылады. Егер графтың құрылымы белгілі болса, онда оның спектралды сипаттамасы бойынша дифференциалдық оператордың коэффициенттерін қалыпқа келтіру маңызды болады. Графтағы дифференциалдық операторларды математика, механика, физика, геофизика, электроникада пайдалануға болады. Зерттеулердің басым бөлігі спектр мен түбірлік функциялардың қасиетін зерттеуге арналған тура есептер туралы жүргізілген. Ол туралы [44] мақалада граф бойындағы спектралды анализдің тура есептері туралы сипатталған. Кері спектралды есептер – операторлардың коэффициенттерін олардың спектралды сипаттамалары бойынша анықтау болып табылады. Бұл есептердің сызықты емес екендігін ескере отырып, олардың қаншалықты қиындық туғызатынын білуге болады. Интервалдағы дифференциалдық операторлар үшін кері спектралды есептің нәтижелері мен шешу әдістері XX ғасырдың екінші жартысында алынды. Ал графтағы дифференциалдық операторлардың спектралды есептері XXI ғасырда зерттеле басталды. Олардың ең алғашқысы ағаштағы кері есепте теориясы болды. Ағаштағы кері есептерді есептеу кезінде екі түрлі әдіс табылды: бірінші әдіс – В.А.Марченко мен Б.М.Левитан әдістері толқынның таралуымен байланысты болды, ал екінші әдіс – аналитикалық функциялар теориясы мен контур бойынша интегралдау идеясы болды. Жоғарыдағы зерттеулер нәтижелері Штурм–Лиувилль операторына қатысты болды. $n > 2$ болған кездегі n -ші ретті операторлар үшін нәтижелері тек ағашта пайда болды. Әр доғадағы дифференциалдық теңдеу әртүрлі ретті болған кездегі реті айнымалы операторлар класы қызықты және маңызды болды. Мұндай графтағы теңдеулер математика мен оның қолданыстарындағы әртүрлі есептерде кездеседі. Атап айтқанда тірек-көпірлер сияқты құрылымдардағы тербелістерді сипаттағанда қолданылады. Реті айнымалы дифференциалдық оператор үшін кері есептердің нәтижелері [31–35, 57] жұмыстарда келтірілген.

2.1. Кері есепті қою

\mathcal{G}_0 түбірі, $V = \{\mathcal{G}_0, \dots, \mathcal{G}_r\}$ төбелер жиыны, $E = \{e_1, \dots, e_r\}$ доғалар жиыны бар R^m кеңістігіне тиісті компакт байланысқан T ағашын қарастырайық. Ыңғайлы болуы үшін әр доғаның ұзындығын 1-ге тең деп аламыз. Егер төбе бір доғаға тиісті болса, онда ол төбені шекаралық төбе деп атаймыз. Ол доғада шекаралық доға деп атаймыз. Қалған барлық төбелер мен доғалар ішкі төбелер мен доғалар ішкі төбелер мен доғалар деп аталады. \mathcal{G}_0 төбесін – шекаралық төбе деп атаймыз. $a, b \in T$ екі нүктесі үшін a нүктесін \mathcal{G}_0 түбірін b нүктесімен қосатын жалғыз жолға тиісті болса, онда $a \leq b$ деп белгілейміз, $|b|$ дегеніміз осы жолдың ұзындығын сипаттайды. Егер $a \leq b$ және $a \neq b$ болса, онда $a < b$ деп белгілейміз. $a < b$ болса, онда $[a, b] := \{z \in T : a \leq z \leq b\}$ деп белгілейміз. Анықтық үшін, $e = [\mathcal{G}, w]$ доғасын біз \mathcal{G} бастапқы нүктесі және w соңғы нүктесі деп атаймыз, яғни e доғасы \mathcal{G} нүктесінен шығады және w нүктесімен аяқталады деп атаймыз. Әрбір

\mathcal{G} ішкі төбелері үшін $R(\mathcal{G}) := \{e \in E : e = [\mathcal{G}, w], w \in V\}$ арқылы \mathcal{G} төбелерден шыққан доғалар жиынын белгілейміз. $e \in E$ доғасының реті оның соңғы нүктесінің реті сияқты анықталады.

Әрбір $e \in E$ доғасы $[0,1]$ кесіндісі ретінде қарастырылады және $x \in [0,1]$ параметрімен сипатталады. Бізге әр $e = [\mathcal{G}, w] \in E$ доғада келесі белгілеулер енгізген тиімді: егер $z = z(x) \in e$ болса, онда $z(0) = w$, $z(1) = \mathcal{G}$ дегеніміз $x = 0$ ақырлы w нүктесіне, ал $x = 1$ бастапқы \mathcal{G} нүктесіне сәйкес келеді деген сөз.

T ағашына [57] тиісті Y функциясы $Y(x) = \{y_j(x)\}_{j \in J}$, $x \in [0,1]$, мұндағы $J := \{j : j = \overline{1, r}\}$ және $y_j(x)$ функциясы e_j доғасында анықталған. $q = [q_j]_{j \in J}$ дегеніміз T -дағы комплекс мәнді функция және оны потенциал деп атаймыз. T ағашында

$$y_j''(x) + q_j(x)y_j(x) = \lambda y_j(x), \quad x \in [0,1], \quad (2.1.1)$$

Штурм–Лиувилль теңдеуін қарастырайық. Мұндағы $j \in J$, λ – спектральды параметр, $y_j(x)$, $y_j'(x)$ функциялары $[0,1]$ інкесдісінде үзіліссіз және \mathcal{G}_k , $k = \overline{p+1, r}$ ішкі төбесінде келесі байланыстыру шарттарын қанағаттандырады:

$$\begin{aligned} y_k(0) &= a_{kj} y_j(1) \quad \forall e_j \in R(\mathcal{G}_k), \\ y_k'(0) &= \sum_{e_j \in R(\mathcal{G}_k)} (a_{kj}^1 y_j'(1) + a_{kj}^0 y_j(1)) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Мұндағы a_{kj} , a_{kj}^0 , a_{kj}^1 – комплекс сандар, $a_{kj} a_{kj}^1 \neq 0$.

$$r_k := \sum_{e_j \in R(\mathcal{G}_k)} \frac{a_{kj}^1}{a_{kj}} \neq -1 \quad (2.1.3)$$

теңдігі орындалсын. Бұл (2.1.3) шарты регуляр байланыстыру шарты деп аталады. (2.1.3) шартын қанағаттандырмайтын T ағашындағы Штурм–Лиувилль [55–56] операторлары мұнда қарастырылмайды. Кез-келген k, j үшін $a_{kj} = a_{kj}^1 = 1$, $a_{kj}^0 = 0$ болса, онда (2.1.2) шарты стандартты байланыстыру шарты деп аталады. Стандартты байланыстыру шарты үшін (2.1.3) регуляр байланыстыру шарты орындалады. Электротехникада (2.1.2) қатынасын Кирхгоф заңы, ал механикада кернеулер балансы деп атайды.

\mathcal{G}_j , $j \in \Gamma$ шекаралық төбелерде

$$U_{js}(Y) := h_{js}^1 Y'_{|\mathcal{G}_j} + h_{js}^0 Y_{|\mathcal{G}_j}, \quad s = 0, 1, \quad j = \overline{0, p}$$

сызықты формаларды қарастырайық. Мұндағы h_{js}^g – комплекс сан, онда $\det[h_{js}^g]_{s, g=0,1} \neq 0$ орындалады. (2.1.1) теңдеуге (2.1.2) байланыстыру шарты және $U_{j0}(Y) = 0$, $j = \overline{0, p}$ шекаралық шартымен қойылған шеттік есепті B арқылы белгілейік. Дәл сондай B_k шеттік есепті қарастырамыз, ол (2.1.1) теңдеуге (2.1.2) байланыстыру шарты және $U_{k1}(Y) = 0$, $U_{j0}(Y) = 0$, $j = \overline{0, p}$, $j \neq k$ шекаралық шартымен қойылған.

(2.1.1) теңдеудің шешімі $\Psi_k(x, \lambda) = [\psi_{kj}(x, \lambda)]_{j \in J}$, $k = \overline{0, p}$ болсын. Ол шешім (2.1.2) байланыстыру шарты мен

$$U_{j0}(\Psi_k) = \delta_{jk}, \quad j = \overline{0, p} \quad (2.1.4)$$

шеттік шартын қанағаттандырсын. Мұндағы δ_{jk} – Кронекер символы. Ψ_k функциясы \mathcal{G}_k шекаралық төбесіне қатысты Вейль шешімі деп аталады. $M(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=1, \overline{p}}$ арқылы белгілейік. Мұндағы $M_k(\lambda) := U_{k1}(\Psi_k)$. $M_k(\lambda)$ функциясы Вейль функциясы деп аталады, ал $M(\lambda)$ Вейль векторы деп аталады. Тағы да $M^0(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=0, \overline{p}}$ кеңейтілген векторы мен $K(\lambda) = [M_{jk}(\lambda)]_{j,k=0, \overline{p}}$ кеңейтілген матрицаны қарастырайық. Мұндағы $M_{jk}(\lambda) := U_{j1}(\Psi_k)$. $M^0(\lambda)$ векторы $K(\lambda)$ матрицасының бас диагоналі, ал $M(\lambda)$ векторы осы бас диагональдың бөлігі.

Анықтық үшін

$$U_{j0}(Y) = Y'_{|_{\mathcal{G}_j}} + h_j Y_{|_{\mathcal{G}_j}}, \quad U_{j1}(Y) = Y_{|_{\mathcal{G}_j}}$$

жағдайын қарастырайық, яғни $h_{j0}^1 = h_{j1}^0 = 1$, $h_{j1}^1 = 0$, $h_{j0}^0 = h_j$. (2.1) теңдеудің $\varphi_j(0, \lambda) = S'_j(0, \lambda) = 1$, $\varphi'_j(0, \lambda) = -h_j$, $S_j(0, \lambda) = 0$ бастапқа шартымен e_j доғасындағы шешімі

$$\varphi_j(x, \lambda), S_j(x, \lambda), \quad j \in J, \quad x \in [0, 1]$$

болсын. Әрбір бекітілген x үшін $\varphi_j^{(g)}(x, \lambda)$ және $S_j^{(g)}(x, \lambda)$, $g = 0, 1$ функциялары λ бойынша $\frac{1}{2}$ ретті бүтін болады. Бұдан бөлек $\langle \varphi_j(x, \lambda), S_j(x, \lambda) \rangle \equiv 1$ теңдігі орындалады, мұндағы $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$ – вронскиан.

$M_{kj}^1(\lambda) = \psi_{kj}(0, \lambda)$, $M_{kj}^0(\lambda) = \psi'_{kj}(0, \lambda) + h_j \psi_{kj}(0, \lambda)$ белгілеуін енгізейік. Онда

$$\psi_{kj}(x, \lambda) = M_{kj}^0(\lambda) S_j(x, \lambda) + M_{kj}^1(\lambda) \varphi_j(x, \lambda) \quad (2.1.5)$$

орындалады.

Дербес жағдай үшін

$$\psi_{kk}(x, \lambda) = S_k(x, \lambda) + M_k(\lambda) \varphi_k(x, \lambda), \quad k = \overline{1, p} \quad (2.1.6)$$

(2.1.5) теңдікті (2.1.2) мен (2.1.4) теңдіктерге қойсақ, онда $M_{kj}^s(\lambda)$ -ға қатысты s_k сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл жүйенің $\Delta(\lambda)$ анықтауышы $\frac{1}{2}$ ретті бүтін болады, ал $\Delta(\lambda)$ нолдері B шеттік есептің $\Lambda = \{\lambda_l\}_{l \geq 0}$ меншікті мәндерімен сәйкес келеді. $\Delta(\lambda)$ функциясы B үшін сипаттамалық функция болады. s_k жүйесін Крамер әдісі арқылы шешер болсақ, онда

$M_{kj}^s(\lambda) = \frac{\Delta_{kj}^s(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$, $s = 0, 1$, $j = \overline{1, r}$. Дербес жағдай үшін

$$M_k(\lambda) = \frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad k = \overline{1, p} \quad (2.1.7)$$

мұндағы, $\Delta_k(\lambda) := \Delta_{kk}^0(\lambda)$. $\Delta_k(\lambda)$ функциясы λ бойынша $\frac{1}{2}$ ретті бүтін болады, ал нольдері B_k шеттік есептің $\Lambda_k = \{\lambda_{lk}\}_{l \geq 0}$ меншікті мәндерімен сәйкес келеді. Бұл функция B_k үшін сипаттамалық функция болады. λ_l және λ_{lk} меншікті мәндері $\{\lambda : |\operatorname{Im} \lambda| \leq c_1, \operatorname{Re} \lambda \geq c_0\}$ теңдігі қандайда бір c_0, c_1 сандары үшін орындалатын сызықтың бойында жатыр. (2.1.7) теңдіктен $M_k(\lambda)$ Вейль функциялары $\{\lambda_l\}_{l \geq 0}$ полюстарымен λ бойынша мероморфты болады. Егер барлық полюстер жай

болса, онда $S := \{\lambda_l, \alpha_{lk}\}_{l \geq 0, k=1, \dots, p}$ деп енгізуге болады, мұндағы α_{lk} дегеніміз λ_l -дағы $M_k(\lambda)$ функциялардың шегерімдері. Ал S дегеніміз B үшін спектралды ақпарлар болады.

$q = [q_j]_{j \in J}$ потенциалы мен $h = [h_j]_{j \in J}$ коэффициенттерін келесі спектралды сипаттамалар бойынша қалыпқа келтірудің үш кері есебі зерттеледі.

2.1.1 кері есеп. $M = [M_k]_{k=1, \dots, p}$ векторы берілген. $q = [q_j]_{j \in J}$ пен $h = [h_j]_{j \in J}$ құру керек.

2.1.2 кері есеп. Λ мен $\Lambda_k, k=1, \dots, p$ спектрлері үшін $p+1$ жүйе берілсін. $q = [q_j]_{j \in J}$ пен $h = [h_j]_{j \in J}$ құру керек.

2.1.3 кері есеп. S спектралды ақпар бойынша $q = [q_j]_{j \in J}$ пен $h = [h_j]_{j \in J}$ құру керек.

2.1.1 кері есеп интервалдағы Вейль функциясы бойынша Штурм–Лиувилль операторы үшін классикалық кері есептің жалпыламасы болады. 2.1.2 кері есеп интервалдағы екі спектр бойынша Штурм–Лиувилль операторы үшін Боргтың кері есебінің жалпыламасы болады. 2.1.3 кері есеп интервалдағы Штурм–Лиувилль операторы үшін классикалық кері Марченко есебінің жалпыламасы болады.

2.2. Жұлдыз – граф бойымен толқындардың таралуы

m – тұрақты натурал сан болсын. Толқындық теңдеулер жүйесіне арналған аралас есепті

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{m+1}(x_{m+1}, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_{m+1}(x_{m+1}, t)}{\partial x_{m+1}^2} &= 0, \quad 0 < x_{m+1} < b_{m+1}, \quad t > 0, \\ \frac{\partial^2 u_m(x_m, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_m(x_m, t)}{\partial x_m^2} &= 0, \quad 0 < x_m < b_m, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

.....

$$\frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} = 0, \quad 0 < x_1 < b_1, \quad t > 0,$$

(a) түріндегі шарттарымен

$$\begin{aligned} u_{m+1}(1, t) = u_1(0, t) = \dots = u_m(0, t), \quad t > 0. \\ \frac{\partial u_{m+1}(1, t)}{\partial x_{m+1}} = \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_m(0, t)}{\partial x_m}, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

және (b) түріндегі шарттармен

$$u_{m+1}(0, t) = 0, \quad u_1(1, t) = 0, \dots, u_m(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.2.3)$$

сондай-ақ бастапқы шарттармен

$$w(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\xi) d\xi, \quad 0 < x < b_1 + b_2, \quad t > 0 \quad (2.2.8)$$

орындалады. Мұнда $\tilde{\varphi}(x)$ және $\tilde{\psi}(x)$ ол $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функцияларының $[0, b_1 + b_2]$ кесіндісінен барлық сан осіндегі жалғасы, олар келесі алгоритммен алынған:

1. Бірінші $[0, b_1 + b_2]$ кесіндісінен тақ жолмен $[-b_1 - b_2, 0]$ кесіндісіне жалғастырамыз,

2. Одан кейін $[-b_1 - b_2, b_1 + b_2]$ кесіндісінен периодты түрде бүкіл сандық ось бойымен жалғасады.

Осы бөлімде (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4) аралас есептер үшін жұлдыз – графта (2.2.8) формуланың аналогы алынған.

Ол үшін дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімінің спектрлік параметрге тәуелділігі

$$-y_j''(x_j) = \rho^2 y_j(x_j), \quad 0 < x_j < b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m+1 \quad (2.2.9)$$

(a) түріндегі шартпен

$$\begin{aligned} y_{m+1}(b_{m+1}) &= y_1(0) = \dots = y_m(0), \\ y'_{m+1}(b_{m+1}) &= y'_1(0) + \dots + y'_m(0) \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

(b) түріндегі шартпен

$$y_{m+1}(0) = 0, \quad y_m(b_m) = 0, \quad y_{m-1}(b_{m-1}) = 0, \quad \dots, \quad y_1(b_1) = 0 \quad (2.2.11)$$

орындалуы керек.

[36,37] жұмыстарда қажетті тәуелділік берілген. [37,56] жұмыстар нәтижесін айту үшін бізге келесі белгілер қажет. $\{1, 2, \dots, m+1\}$ жиынының белгілі j мәнінде (2.2.9) теңдеудің шешімін

$$C_j(0, \lambda) = C'_j(0, \lambda) = 0, \quad C_j(b_j, \lambda) = S'_j(b_j, \lambda) = 1$$

шартымен $C_j(x_j, \lambda)$ және $S_j(x_j, \lambda)$ арқылы белгілейік.

Шындығында, бұл функциялар

$$C_j(x_j, \lambda) = \cos \rho x_j, \quad S_j(x_j, \lambda) = \frac{\sin \rho x_j}{\rho}, \quad \rho^2 = \lambda.$$

айқын түрде сипатталады.

Келесі тұжырым [37] жұмыста дәлелденді.

1 тұжырым. $y_{m+1}(x_{m+1}, \lambda) = S_{m+1}(x_{m+1}, \lambda)$, $x_{m+1} \in e_{m+1}$ болсын. (2.2.9), (2.2.10), (2.2.11) жүйенің шешімі

$$y_j(x_j, \lambda) = S_{m+1}(b_{m+1}, \lambda) C_j(x_j, \lambda) + B_j S'_{m+1}(b_{m+1}, \lambda) S_j(x_j, \lambda), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.2.12)$$

түрінде болады. Мұндағы B_1, B_2, \dots, B_m тұрақтылар

$$B_1 + B_2 + \dots + B_m = 1 \quad (2.2.13)$$

қатынасын қанағаттандырады.

$\{\lambda_n, n \geq 1\}$ арқылы (2.2.9), (2.2.10), (2.2.11) есептердің меншікті мәндерін белгілейік. Онда $\lambda = \lambda_n$ болғанда (2.2.11) теңдіктен

$$S_{m+1}(b_{m+1}, \lambda) \cdot C_j(b_j, \lambda) + B_j S'_{m+1}(b_{m+1}, \lambda) S_j(b_j, \lambda) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

қатынасы шығады.

Сәйкесінше

$$B_j = -\frac{S_{m+1}(b_{m+1}, \lambda_n) \cdot C_j(b_j, \lambda_n)}{S'_{m+1}(b_{m+1}, \lambda_n) S_j(b_j, \lambda_n)}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

(2.2.13) теңдіктен келесі қатынас шығады

$$\frac{S'_{m+1}(b_{m+1}, \lambda_n)}{S_{m+1}(b_{m+1}, \lambda_n)} + \sum_{j=1}^m \frac{C_j(b_j, \lambda_n)}{S_j(b_j, \lambda_n)} = 0. \quad (2.2.15)$$

(2.2.15) қатынастың сол жағын $\Delta(\lambda_n)$ арқылы белгілейік. Онда

$$\Delta(\lambda) = \sqrt{\lambda} \sum_{j=1}^{m+1} ctg(b_j \sqrt{\lambda})$$

болатынын байқаймыз.

Лемма 2.2.1. $\Delta(\lambda)$ бүтін функциялардың нөлдері нақты және жай болады. Меншікті мәндердің жай болуы келесі теңдіктен шығады:

$$\Delta'(\lambda_n) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{\sin^2(b_j \sqrt{\lambda_n})} < 0.$$

Бұл жағдайда меншікті функциялар жүйесі келесі түрде болады:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(x_1, \lambda_n) = \frac{\sin \sqrt{\lambda_n}(b_1 - x_1)}{\sqrt{\lambda_n}} S_2(b_2, \lambda_n) \dots S_m(b_m, \lambda_n) S_{m+1}(b_{m+1}, \lambda_n) \\ w_2(x_1, \lambda_n) = S_1(b_1, \lambda_n) \frac{\sin \sqrt{\lambda_n}(b_2 - x_2)}{\sqrt{\lambda_n}} S_3(b_3, \lambda_n) \dots S_m(b_m, \lambda_n) S_{m+1}(b_{m+1}, \lambda_n) \\ \dots \dots \dots \\ w_m(x_m, \lambda_n) = S_1(b_1, \lambda_n) S_2(b_2, \lambda_n) S_3(b_3, \lambda_n) \dots S_{m-1}(b_{m-1}, \lambda_n) \frac{\sin \sqrt{\lambda_n}(b_m - x_m)}{\sqrt{\lambda_n}} S_{m+1}(b_{m+1}, \lambda_n) \\ w_{m+1}(x_{m+1}, \lambda_n) = S_1(b_1, \lambda_n) S_2(b_2, \lambda_n) S_3(b_3, \lambda_n) \dots S_m(b_m, \lambda_n) \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} x_{m+1}}{\sqrt{\lambda_n}} \end{array} \right. \quad (2.2.16)$$

Н.П.Бондаренко [40] жұмысынан, (2.2.9), (2.2.10), (2.2.11) есептер $L_2(\Gamma)$ -де өзіне-өзі түйіндес болады. Сондықтан (2.2.16) жүйе $L_2(\tau)$ кеңістігінде ортогональ базис құрады. $L_2(\Gamma)$ -де скаляр көбейтінді

$$(y, z) = \sum_{j=1}^{m+1} (y_j, z_j) = \sum_{j=1}^{m+1} \int_0^{b_j} y_j(x_j) \overline{z_j(x_j)} dx_j, \quad y, z \in L_2(\Gamma)$$

түрінде анықталатынын еске салайық.

(2.2.4) бастапқы мәліметтерді $\Phi = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_{m+1}(x_{m+1}))$ және $\Psi = (\psi_1(x_1), \psi_2(x_2), \dots, \psi_{m+1}(x_{m+1}))$ арқылы белгілейік. λ_n меншікті мәніне сәйкес келетін меншікті функцияларды

$$W_n = (w_1(x_1, \lambda_n), w_2(x_2, \lambda_n), \dots, w_{m+1}(x_{m+1}, \lambda_n))$$

арқылы белгілейміз.

Ары қарай, Φ, Ψ бастапқы мәндері (2.2.2) және (2.2.3) шартына бағынады деп есептейміз. Онда Φ, Ψ функциялары меншікті функциялар бойынша Γ -да біркелкі жинақталатын

$$\Phi = \sum_n D_n(\Phi)W_n, \quad \Psi = \sum_n D_n(\Psi)W_n, \quad (2.2.17)$$

қатарларға жіктеледі. Кесіндідегі дифференциалдық операторларға арналған ұқсас теорема М.А.Наймарк [28] монографиясында дәлелденген. Ол теорема белгілі графтағы дифференциалдық операторлар үшін орындалады. $\{D_n(\Phi)\}, \{D_n(\Psi)\}$ Фурье коэффициенттері

$$D_n(\Phi) = \frac{(\Phi, W_n)}{(W_n, W_n)}, \quad D_n(\Psi) = \frac{(\Psi, W_n)}{(W_n, W_n)}$$

формулаларымен анықталатынын еске салайық.

(2.2.17) қатынасты келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{cases} \varphi_j(x_j) = \sum_n D_n(\Phi) w_j(x_j, \lambda_n), \\ \psi_j(x_j) = \sum_n D_n(\Psi) w_j(x_j, \lambda_n), \quad j = 1, 2, \dots, m+1 \end{cases} \quad (2.2.18)$$

Жалпы түрін ескеріп, $\Psi \equiv 0$ болғанда Даламбер формуласын қорытайық. Егер $\Phi \neq 0$, $\Psi \equiv 0$ болса, онда $\Psi \neq 0$ жағдайына Даламбер формуласын алу әдісі белгілі. $\Psi \equiv 0$ болсын. Графтағы (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4) аралас есептің шешімін

$$u_j(x_j, t) = \sum_n d_n(t) w_j(x_j, \lambda_n), \quad 0 < x_j < b_j, \quad j = 1, \dots, m+1$$

түрінде іздейміз.

$$d_n(t) = D_n(\Phi) \cos \sqrt{\lambda_n} \cdot t, \quad n \geq 1$$

болатынын түсіну қиын емес.

Осылайша шешім

$$u_j(x_j, t) = \sum_n D_n(\Phi) \cos \sqrt{\lambda_n} t \cdot w_j(x_j, \lambda_n), \quad 0 < x_j < b_j, \quad t > 0, \quad j = 1, \dots, m+1 \quad (2.2.19)$$

түрінде болады.

Келесі леммада n мен j -дің белгіленген мәндерінде $\cos \sqrt{\lambda_n} t \cdot w_j(x_j, \lambda_n)$ көбейтіндісінің қасиеті көрсетілген.

Лемма 2.2.2. n мен j белгіленген мәндерінде келесі

$$\cos \sqrt{\lambda_n} t \cdot w_j(x_j, \lambda_n) = \frac{1}{2} w_j(x_j - t, \lambda_n) + \frac{1}{2} w_j(x_j + t, \lambda_n)$$

теңдік орынды.

Лемма 2.2.2 дәлелі келесі теңдіктен шығады

$$\cos \sqrt{\lambda_n} t \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} (b_j - x_j)}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{2} \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} (b_j - x_j + t)}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{1}{2} \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} (b_j - x_j - t)}{\sqrt{\lambda_n}}$$

(2.2.18) қатарлары белгіленген $j = 1, 2, \dots, m+1$. мәндерінде e_j доғасында бірқалыпты жинақты болады.

Онда леммы 2.2.2-ден және (2.2.19) формуладан жұмыстың негізгі тұжырымы шығады.

Теорема 2.2.1. $\Phi = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_{m+1}(x_{m+1}))$, $\Psi = (\psi_1(x_1), \psi_2(x_2), \dots, \psi_{m+1}(x_{m+1}))$ бастапқы мәліметтері Γ графта үзіліссіз екі рет дифференциалданатын функциялар болсын және (2.2.2) және (2.2.3) шарттарын қанағатандырсын. Γ графта (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) және (2.2.4) аралас есептері

$$u_j(x_j, t) = \frac{1}{2} \tilde{\varphi}_j(x_j + t) + \frac{1}{2} \tilde{\varphi}_j(x_j - t) + \frac{1}{2} \int_{x_j - t}^{x_j + t} \tilde{\psi}_j(\xi) d\xi. \quad j = 1, 2, \dots, m+1,$$

түрінде сипатталатын жалғыз шешімге ие.

2.3. Жұлдыз–графтағы Штурм–Лиувилль операторының анықталу облысының идентификациясы

Борг [41] жұмысында келесі нәтижелер алынған: $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ – арқылы

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \quad (2.3.1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (2.3.2)$$

есептердің меншікті мәндерін белгілейік, мұндағы $q(x)$ – дегеніміз $[0, \pi]$ кесіндісінде үзіліссіз, ал h, H – нақты сандар. Дәл сол сияқты μ_1, μ_2, \dots – арқылы (2.3.1) теңдеудің меншікті мәндерін

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (2.3.3)$$

шеттік шарт орындалғанда белгілейміз, мұндағы $h_1 \neq h$. Онда $\{\lambda_n\}$ және $\{\mu_n\}$ тізбектері $q(x)$ функциясы мен h, h_1 және H сандарын бірмәнді анықтайды. Осылайша, Борг екі эталонды есептердің спектрін енгізеді:

E_1 – бірінші эталонды есеп (2.3.1)–(2.3.3),

E_2 – екінші эталонды есеп (2.3.1)–(2.3.2).

E_1 және E_2 эталонды есептердің спектрінің жиыны бойынша қалыпқа келтіру керек, соңғы эталонды есеп (2.3.1)–(2.3.2) есептермен сәйкес келеді. [42,55] жұмыстарда E_1 және E_2 есептердің екі спектрі $\{\lambda_n\}$ және $\{\mu_n\}$ тізбектері болатыны қойылды және қажетті және жеткілікті шарттары дәлелденді.

Плаксина [43] жұмысында $[0, \pi]$ аралығында $l = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right)$

операциясынан туындаған және

$$\begin{cases} y'(0) + \beta y(0) + e^{i\alpha} \cdot y(\pi) = 0, \\ y'(\pi) - e^{-i\alpha} \cdot y(0) + \gamma y(\pi) = 0, \end{cases} \quad (2.3.4)$$

түріндегі түйіндес шекаралық шарттармен сипатталған операторлар үшін кері есептер зерттеледі, мұндағы α, β, γ – нақты сандар. [43] жұмыста E_1, E_2 және E_3 эталонды үш есептің спектрі арқылы $q(x)$ функциясы мен α, β, γ сандарын қалыпқа келтіру сипатталған. E_1 эталонды есеп (1) теңдеумен және

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) + \gamma y(\pi) = 0. \quad (2.3.5)$$

шекаралық шарттармен сипатталады.

E_2 эталондық есеп (2.3.1) теңдеуімен және (2.3.4) түріндегі үзіліссіз шекаралық шарттармен сипатталады, тек (2.3.4) теңдікте α -ны қалған коэффициенттерді сақтай отырып α_1 -ге ауыстыру керек. E_3 эталондық есеп (2.3.1)–(2.3.4) есептерімен сәйкес келеді. $q(x)$ пен $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1$ сандарын бірмәнді қалыпқа келтіру үшін E_1, E_2 және E_3 эталондық есептердің үш спектрін анықтау жеткілікті. Қалыпқа келтіру бірмәнді болуы үшін E_1, E_2 және E_3 эталондық есептердің спектрлерінің жиынына қандайда бір $\{\delta_n\}$ тізбектер жиынын қосу керек, мұндағы $\{\delta_n\}$ дегеніміз $+1$ немесе -1 ге тең болады. [43,57] жұмыстарда жоғарыдағы тізбектер E_1, E_2 және E_3 эталондық есептердің спектрлері болатынының қажетті және жеткілікті шарттары келтірілген.

2.3.1. Граф – жұлдыздағы Штурм–Лиувилль теңдеуі үшін Коши есебінің шешімі

$\Gamma = \{V, E\}$ – граф-жұлдыз, V дегеніміз 0-ден $m+1$ -ге дейін белгіленген төбелер жиыны; ал E дегеніміз e_1, \dots, e_m доғалар жиынының жиыны [44]. Әрбір e_j доғасында

$$-y_j''(x_j) + p_j(x_j)y_j(x_j) = f_j(x_j), \quad 0 < x_j < b_j \quad (2.3.1.1)$$

дифференциалдық теңдеу орындалады.

$p_j(x)$, $j \geq 1$ функциялары e_j -да үзіліссіз нақты болады деп есептейік. $(m+1) \in V$ төбесі граф – жұлдыздың ішкі төбесі деп аталады. $(m+1)$ ішкі төбеде Кирхгоф [45] заңы орындалады:

$$\begin{cases} y_{m+1}(b_{m+1}) = y_1(0) = \dots = y_m(0) \\ y'_{m+1}(b_{m+1}) = y'_1(0) + \dots + y'_m(0) \end{cases} \quad (2.3.1.2)$$

$0, 1, \dots, m$ төбелері граф – жұлдыздың шекаралық төбелері деп аталады. (4 сурет).

Шекаралық $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ төбелерде келесі шеттік шарттар жиыны орындалады:

$$U_k(y_1, \dots, y_{m+1}) = \sum_{j=1}^2 [\alpha_{kj} y_1^{(j-1)}(b_1) + \alpha_{k(2+j)} y_2^{(j-1)}(b_2) + \dots + \alpha_{k(2m-2+j)} y_m^{(j-1)}(b_m) + \alpha_{k(2m+j)} y_{m+1}^{(j-1)}(0)] = 0 \quad (2.3.1.3)$$

α_{ks} – комплекс сандар. Ары қарай жеңіл болуы үшін $c_j(x_j), s_j(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, m+1$ функцияларын енгізейік. Әрбір j үшін $c_j(x_j), s_j(x_j)$ функциялары

$$\begin{cases} c_j(0) = s'_j(0) = 1, c'_j(0) = s_j(0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ c_{m+1}(b_{m+1}) = s'_{m+1}(b_{m+1}) = 1, c'_{m+1}(b_{m+1}) = s_{m+1}(b_{m+1}) = 0. \end{cases}$$

бастапқы шартты

$$-y_j''(x_j) + p_j(x_j)y_j(x_j) = 0, \quad 0 < x_j < b_j \quad (2.3.1.4)$$

біртекті дифференциалдық теңдеудің шешімі болады.

Граф – жұлдыз ағаш [47] түрінде болғандықтан, 0 төбесін j төбемен қосатын жалғыз жол бар, мұндағы $j = 1, \dots, m$. Бұл жолды $S_j = e_{m+1} \cup e_j$ арқылы белгілейік. Осы S_j жолды $(0, b_{m+1})$ мен $(b_{m+1}, b_{m+1} + b_j)$ интервалдарының бірігуімен қарастырайық. $S_j = (0, b_{m+1}) \cup (b_{m+1}, b_{m+1} + b_j)$ интервалдар бірігуінде

$$-\varphi''(x) + q_j(x)\varphi_j(x) = F_j(x) \quad x \in (0, b_{m+1}) \cup (b_{m+1}, b_{m+1} + b_j) \quad (2.3.1.5)$$

дифференциалдық теңдеуді енгізу тиімді болады, мұндағы

$$\begin{aligned} q_j(x) &= p_{m+1}(x), \text{ егер } 0 < x < b_{m+1}, \\ q_j(x) &= p_j(x), \text{ егер } b_{m+1} < x < b_{m+1} + b_j, \\ F_j(x) &= f_{m+1}(x), \text{ егер } 0 < x < b_{m+1} \\ F_j(x) &= f_j(x), \text{ егер } b_{m+1} < x < b_{m+1} + b_j \end{aligned}$$

$x = b_{m+1}$ нүктесінде

$$\varphi_j(b_{m+1} - 0) = \varphi_j(b_{m+1} + 0), \quad A_j \varphi'_j(b_{m+1} - 0) = \varphi'_j(b_{m+1} + 0), \quad (2.3.1.6)$$

шартын қоямыз, мұндағы $\{A_j\}$ еркін тұрақты, ол

$$A_1 + A_2 + \dots + A_m = 1 \quad (2.3.1.7)$$

заңдылығына бағынады.

A_1, A_2, \dots, A_m мәндері (2.3.1.7) орындалатындай алынсын. Тағы да $\varphi_j(x), \varphi'_j(x)$ функциялары солдан үзіліссіз деп есептейік, яғни $\varphi_j(b_{m+1} - 0) = \varphi_j(b_{m+1}), \varphi'_j(b_{m+1} - 0) = \varphi'_j(b_{m+1})$. $\Phi_j(x)$ және $\Psi_j(x)$ арқылы (2.3.1.5) теңдеудің шешімін $F_j(x) \equiv 0$ болғанда S_j деп белгілейік, олар (2.3.1.6) шартпен,

$$\Phi_j(b_{m+1} - 0) = \Psi'_j(b_{m+1} - 0) = 1, \Phi'_j(b_{m+1} - 0) = \Psi_j(b_{m+1} - 0) = 0 \quad (2.3.1.8)$$

шарттарына бағынсын.

$\{1, \dots, m\}$ жиынындағы және $x \in S_j$ жиынындағы кез-келген j үшін (2.3.1.5) теңдеудің дербес шешімін

$$\varphi_j(x) = \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} \Phi_j(x) & \Psi_j(x) \\ \Phi_j(t) & \Psi_j(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi'_j(t) & \Psi'_j(t) \\ \Phi_j(t) & \Psi_j(t) \end{vmatrix}} F_j(t) dt \quad (2.3.1.9)$$

формуласы арқылы енгізейік.

(2.3.1.9) теңдікпен анықталған $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ функциялары, $x = b_{m+1}$ нүктесінде Кирхгоф (2.3.1.2) шартын қанағаттандырады. Шынында, $x \in (0, b_{m+1}) \cup (b_{m+1}, b_{m+1} + b_j)$ болғанда

$$\varphi_j(x) = \int_0^x \begin{vmatrix} c_{m+1}(x) & s_{m+1}(x) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t) dt, \quad x \in (0, b_{m+1}),$$

$$\varphi_j(x + b_{m+1}) = \int_0^{b_{m+1}} \begin{vmatrix} \Phi_j(x + b_{m+1}) & \Psi_j(x + b_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t) dt + \int_0^x \begin{vmatrix} c_j(x) & s_j(x) \\ c_j(t) & s_j(t) \end{vmatrix} f_j(t) dt, \quad x \in (0, b_j)$$

орынды. $x \in (0, b_j)$ болғанда $\Phi_j(x + b_{m+1}) = c_j(x)$, $\Psi_j(x + b_{m+1}) = A_j s_j(x)$, ал $x \in (0, b_{m+1})$ болғанда $\Phi_j(x) = c_{m+1}(x)$, $\Psi_j(x) = s_{m+1}(x)$ орынды. Осылайша келесі тұжырым жасауға болады.

Теорема 2.3.1.1. $x_{m+1} = 0$ нүктесінде Коши шартымен (2.3.1.1), (2.3.1.2) Штурм–Лиувилль теңдеуі үшін Коши есебінің шешімі

$$\theta_{m+1}(0) = 0, \theta'_{m+1}(0) = 0 \quad (2.3.1.10)$$

болсын, $\Theta = (\theta_1(x_1), \theta_2(x_2), \dots, \theta_{m+1}(x_{m+1}))$ арқылы белгілейік және ол келесі түрде болсын

$$\theta_{m+1}(x_{m+1}) = \int_0^{x_{m+1}} \begin{vmatrix} c_{m+1}(x_{m+1}) & s_{m+1}(x_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t) dt, \quad x_{m+1} \in e_{m+1}$$

$$\theta_j(x_j) = \int_0^{b_{m+1}} \begin{vmatrix} c_j(x_j) & A_j s_j(x_j) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t) dt + \int_0^{x_j} \begin{vmatrix} c_j(x_j) & s_j(x_j) \\ c_j(t) & s_j(t) \end{vmatrix} f_j(t) dt, \quad x_j \in e_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

мұндағы A_1, A_2, \dots, A_m —(2.3.1.7) талабына бағынатын тұрақтылар.

Ескерту 2.3.1.1. 2.3.1.1 теоремадан, (2.3.1.1), (2.3.1.2), (2.3.1.10) Коши есебі $(m-1)$ тұрақтыдан тәуелді болатынын байқаймыз. (2.3.1.7) талабын қанағаттандыратын A_1, A_2, \dots, A_m тұрақтылары, $x_{m+1} = b_{m+1}$ нүктесінде e_1, \dots, e_m

доғаларандағы лектердің e_{m+1} доғасына қатысты қатынасы. Ал A_1, A_2, \dots, A_m сандарын байланыс тұрақтылары деп аталады.

2.3.2. Шеттік шарт жиыны бойынша биортогональ жүйенің шешімін құру

Егер

$$U_k(R_j) = \delta_{kj}, \quad k, j = 0, 1, \dots, m \quad (2.3.2.1)$$

шарттары орындалса, $j = 0, 1, \dots, m$ болғанда (2.3.1.5)–(2.3.1.2) есептің $R_j = \{r_{1j}(x_1), \dots, r_{m+1,j}(x_{m+1})\}$ шешімдер жүйесі $U_0(\cdot), \dots, U_m(\cdot)$ шекаралық формаларға қатысты биортогональ деп аталады, мұндағы δ_{kj} – Кронекер символы. Бұл пункте шешімнің биортогональ жүйесі болуының қажетті шарттарын табамыз. (2.3.1.5)–(2.3.1.2) есептің шешімнің биортогональ жүйесі болуы үшін $\{U_k, k = 0, 1, \dots, m\}$ шекаралық форма жиыны қандай шарттарды қанағаттандыру керек екенін айту. Келесі матрица енгізейік

$$T = \begin{bmatrix} U_0(c_1, c_2, \dots, c_{m+1}) & U_0^1(s_1) & U_0^2(s_2) & \dots & U_0^m(s_m) & U_0^{m+1}(s_{m+1}) \\ U_1(c_1, c_2, \dots, c_{m+1}) & U_1^1(s_1) & U_1^2(s_2) & \dots & U_1^m(s_m) & U_1^{m+1}(s_{m+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m(c_1, c_2, \dots, c_{m+1}) & U_m^1(s_1) & U_m^2(s_2) & \dots & U_m^m(s_m) & U_m^{m+1}(s_{m+1}) \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

мұндағы

$$U_i^k(s_k) = \sum_{j=1}^2 \alpha_{i(2k-2+j)} s_k^{(j-1)}(b_k), \quad k \geq 1, i \geq 0, \quad (2.3.2.2)$$

$$U_i^{m+1}(s_{m+1}) = \sum_{j=1}^2 \alpha_{i(2m+j)} s_{m+1}^{(j-1)}(0).$$

Теорема 2.3.2. $U_0(\cdot), \dots, U_m(\cdot)$ шекаралық формалардың жиынында

$$\det T \neq 0$$

болсын. Онда $\{U_0, \dots, U_m\}$ формаларына қатысты биортогональ болатын (2.3.1.5)–(2.3.1.2) есептің шешімдер жүйесі жалғыз болады.

Теорема 2.3.2. дәлелдеуі. (2.3.1.2) Кирхгоф шартына бағынатын, (2.3.1.5) біртекті дифференциалдық теңдеу жүйесінің жалпы шешімі:

$$y_{m+1}(x_{m+1}) = D \cdot c_{m+1}(x_{m+1}) + E \cdot s_{m+1}(x_{m+1}), \quad x_{m+1} \in e_{m+1}, \quad (2.3.2.3)$$

$$y_j(x_j) = D c_j(x_j) + E A_j s_j(x_j), \quad x_j \in e_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.3.2.4)$$

Мұндағы D, E және A_1, \dots, A_m – сандары (2.3.1.7) талапқа бағынады.

$$U_0(R) = 1, U_1(R) = 0, \dots, U_m(R) = 0 \quad (2.3.2.5)$$

шартын қанағаттандыратын R табылатынын дәлеледейік

$R = (r_1(x), r_2(x), \dots, r_{m+1}(x))$ функциясын (2.3.2.3) және (2.3.2.4) түрінде жазайық. (2.3.2.3) және (2.3.2.4) қатынастарын (2.3.2.5) теңдікке қойсақ, $D, E, A_1 E, A_2 E, \dots, A_m E$ қатысты алгебралық теңдеу жүйесін аламыз:

$$Tz = l_1, \quad (2.3.2.6)$$

мұндағы

$$z = [D, A_1 E, A_2 E, \dots, A_m E, E]^T$$

$$l_1 = [1, 0, 0, \dots, 0]^T$$

$\det T \neq 0$ болғандықтан, (2.3.2.6) жүйеден $E, A_1, A_2, \dots, A_m, D$ сандары бірімді табылады. Сәйкесінше, $j=0$ болғанда (2.3.2.1) шарттан R_0 жалғыз түрде анықталады. Дәл солай, R_1, \dots, R_m мәндері $j \geq 1$ болғанда (16) шарттан бірімді анықталады. Теорема 2.3.2 толық дәлелденді.

2.3.3. Интегралдық түрдегі шекаралық формалардың эквивалент жиыны

Бұл пункта (2.3.1.3) теңдіктегі $\{U_0, \dots, U_m\}$ шекаралық формалар жиынын эквивалент $\{W_0, \dots, W_m\}$ шекаралық формалар жиынымен алмастырамыз. $A_m = 1 - A_1 - \dots - A_{m-1}$ саны болсын, ал A_1, A_2, \dots, A_{m-1} – сандары кез-келген. $\{W_0, \dots, W_m\}$ шекаралық форманың айқын түрін сипаттау үшін келесі функцияларды енгізейік:

$$\rho_k^{(1)}(t) = \sum_{i=0}^m r_{m+1 i} (0) \begin{vmatrix} U_i^k(c_k) & U_i^k(s_k) \\ c_k(t) & s_k(t) \end{vmatrix}, t \in e_k, k \leq m,$$

$$\rho_{m+1}^{(1)}(t) = \sum_{i=0}^m r_{m+1 i} (0) \left(\begin{vmatrix} U_i^{m+1}(c_{m+1}) & U_i^{m+1}(s_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} + \sum_{l=1}^m \begin{vmatrix} U_i^l(c_l) & A_l U_i^l(s_l) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} \right), t \in e_{m+1},$$

$$\rho_k^{(2)}(t) = \sum_{i=0}^m r'_{m+1 i} (0) \begin{vmatrix} U_i^k(c_k) & U_i^k(s_k) \\ c_k(t) & s_k(t) \end{vmatrix}, t \in e_k, k \leq m, \quad (2.3.3.1)$$

$$\rho_{m+1}^{(2)}(t) = \sum_{i=0}^m r'_{m+1 i} (0) \left(\begin{vmatrix} U_i^{m+1}(c_{m+1}) & U_i^{m+1}(s_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} + \sum_{l=1}^m \begin{vmatrix} U_i^l(c_l) & A_l U_i^l(s_l) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} \right), t \in e_{m+1},$$

$$\rho_k^{(j+2)}(t) = \sum_{i=0}^m (r'_{j i} (0) - A_j r'_{m+1 i} (b_{m+1})) \begin{vmatrix} U_i^k(c_k) & U_i^k(s_k) \\ c_k(t) & s_k(t) \end{vmatrix}, t \in e_k, k \leq m,$$

$$\rho_{m+1}^{(j+2)}(t) = \sum_{i=0}^m (r'_{j i} (0) - A_j r'_{m+1 i} (b_{m+1})) \left(\begin{vmatrix} U_i^{m+1}(c_{m+1}) & U_i^{m+1}(s_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} + \sum_{l=1}^m \begin{vmatrix} U_i^l(c_l) & A_l U_i^l(s_l) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} \right), t \in e_{m+1}$$

Енді жаңа шекаралық формаларды келесі формулалармен анықтаймыз:

$$W_0(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) = y_{m+1}(0) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(1)}(t) (-y_k''(t) + p_k(t) y_k(t)) dt,$$

$$W_1(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) = y'_{m+1}(0) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(2)}(t) (-y_k''(t) + p_k(t) y_k(t)) dt,$$

$$W_{j+1}(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) = y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(j+2)}(t) (-y_k''(t) + p_k(t) y_k(t)) dt, j = 1, \dots, m-1.$$

Теорема 2.3.3. (2.3.1.1), (2.3.1.2), (2.3.1.3) есептерінің жалғыз $Y = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_{m+1}(x_{m+1}))$ шешімдері болсын. Онда (2.3.1.3) шеттік шарттардың жиыны келесі шекаралық шарттарға эквивалент болады:

$$W_k(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) = 0, k = 0, 1, \dots, m. \quad (2.3.3.2)$$

2.3.1 теоремаға қатысты анықталған шекаралық шарттарды канондық шекаралық шарт немесе нормаланған шекаралық шарт деп атаймыз [46]. Сондықтан (2.3.1.3) шекаралық шартты қалыпқа келтіру орнына біз (2.3.3.2) шекаралық шартты қалыпқа келтіреміз.

Ескерту 2.3.2.2. $\{1, \dots, m+1\}$ жиынынан бекітілген k үшін $\rho_k^{(j)}(t)$ функциялары e_k доғасында анықталған және (2.3.1.4) бәртекті теңдеудің шешімі болады.

Теорема 2.3.3 дәлелденуі. 2.3.1 теоремаға сәйкес Коши есебінің шешімін анықтайық:

$$\theta_j(x_j) = \int_0^{b_{m+1}} \begin{vmatrix} c_j(x_j) & A_j s_j(x_j) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t) dt + \int_0^{x_j} \begin{vmatrix} c_j(x_j) & s_j(x_j) \\ c_j(t) & s_j(t) \end{vmatrix} f_j(t) dt, \quad x_j \in e_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.3.3.3)$$

$$\theta_{m+1}(x_{m+1}) = \int_0^{x_{m+1}} \begin{vmatrix} c_{m+1}(x_{m+1}) & s_{m+1}(x_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t) dt, \quad x_{m+1} \in e_{m+1}.$$

Тексерістер нәтижесінде

$$\vartheta_j(x_j) = \theta_j(x_j) - \sum_{i=0}^m U_i(\theta) r_{ji}(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, m+1 \quad (2.3.3.4)$$

(2.3.1.3) шекаралық шартты қанағаттандырады. Оны $V = (\vartheta_1(x_1), \dots, \vartheta_{m+1}(x_{m+1}))$ арқылы белгілейік.

$$U_i(Y) = \sum_{k=1}^{m+1} U_i^k(y_k) \text{ теңдігінен шығатын } \sum_{j=1}^{m+1} U_0^j(\vartheta_j) = \sum_{j=0}^{m+1} U_0^j(\theta_j) - \sum_{i=0}^m U_i(\theta) \sum_{j=1}^{m+1} U_0^j(r_{ji})$$

өрнегін жазайық. $U_i^k(y_k)$ шамасы (2.3.2.2) сияқты анықталады. Осыдан және $\{R_0, \dots, R_m\}$ және $\{U_0, \dots, U_m\}$ биортогональ қатынастардан

$$U_0(V) = U_0(\theta) - \sum_{i=0}^m U_i(\theta) U_0(R_i) = 0 \text{ шығады, олардан (2.3.1.3) шекаралық шарттардың}$$

орындалатынын байқаймыз. (2.3.1.1), (2.3.1.2), (2.3.1.3) есептердің шешімі V болатынын байқаймыз. (2.3.1.1), (2.3.1.2), (2.3.1.3) есептердің шешімінің жалғыздығынан

$$Y = V \text{ немесе } y_j(x_j) = \vartheta_j(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, m+1 \quad (2.3.3.5)$$

(2.3.3.4) және (2.3.3.5) формулалардан

$$\theta_j(x_j) = y_j(x_j) + \sum_{i=0}^m U_i(\Theta) r_{ji}(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, m+1 \quad (2.3.3.6)$$

қатынасы пайда болады.

Θ келесі шарттарды қанағаттандырады:

$$\theta_{m+1}(0) = 0, \quad \theta'_{m+1}(0) = 0, \quad \theta'_j(0) - A_j \theta'_{m+1}(b_{m+1}) = 0, \quad j = 1, \dots, m-1 \quad (2.3.3.7)$$

(2.3.3.6) теңдіктің оң жағын (2.3.3.7) шартқа қоямыз. Нәтижесінде

$$y_{m+1}(0) + \sum_{i=0}^m U_i(\Theta) r_{m+1i}(0) = 0,$$

$$y'_{m+1}(0) + \sum_{i=0}^m U_i(\Theta) r'_{m+1i}(0) = 0,$$

$$y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) + \sum_{i=0}^m U_i(\Theta) (r'_{ji}(0) - A_j r'_{m+1 i}(b_{m+1})) = 0, \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (2.3.3.8)$$

(2.3.3.3) қатынасты ескере отырып, $U_0(\Theta), \dots, U_m(\Theta)$ мәндерін есептейміз. $i = 0, 1, \dots, m$ болғанда нәтижесінде

$$U_i(\Theta) = \sum_{k=1}^{m+1} U_i^k(\theta_k) = \sum_{k=1}^m \int_0^{b_{m+1}} \begin{vmatrix} U_i^k(c_k) & A_k U_i^k(s_k) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t) dt + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \begin{vmatrix} U_i^k(c_k) & U_i^k(s_k) \\ c_k(t) & s_k(t) \end{vmatrix} f_k(t) dt. \quad (2.3.3.9)$$

(2.3.3.9) теңдіктің оң жағын (2.3.3.8) теңдікке қоямыз. Нәтижесінде

$$\begin{cases} y_{m+1}(0) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(1)}(t) f_k(t) dt = 0, \\ y'_{m+1}(0) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(2)}(t) f_k(t) dt = 0, \\ y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(j+2)}(t) f_k(t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (2.3.3.10)$$

$k \geq 1$ болғанда $f_k(t) = -y_k''(t) + p_k(t)y_k(t)$, (2.3.3.10) теңдіктен 2.3.3 теореманың дәлелі шығады.

2.3.4. Эталондық есепті таңдау және кері есепті анықтап қою

Бұл бөлімде спектрлері бастапқы шеттік есептің шекаралық шарттарын немесе эквивалентті шекаралық шарттарды бірегей түрде табуға мүмкіндік беретін эталондық есептерді таңдау әдісі көрсетілген. Яғни, эталондық есептің спектрі арқылы функцияларды анықтау жеткілікті

$$\{\rho_k^{(j)}(t), \quad k = 1, \dots, m+1, \quad j = 1, \dots, m+2\}$$

Негізінде, шекаралық коэффициенттерді анықтау кезінде қосымша эталондық есептің барлық спектрі емес, тек оның ақырлы бөлігі ғана пайдаланылады.

Қосымша эталондық есептердің саны граф – жұлдыздардың доғаларының санына тең. Яғни, $(m+1)$ эталондық есеп құрамыз. Бірінші эталондық есеп ретінде

$$W_0(y) = 0, \quad y'_{m+1}(0) = 0, \quad y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) = 0, \quad j = 1, \dots, m-1 \quad (2.3.4.1)$$

түріндегі шекаралық шартымен берілген (2.3.1.1), (2.3.1.2) есепті аламыз.

Екінші эталондық есеп ретінде

$$W_0(y) = 0, \quad W_1(y) = 0, \quad y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) = 0, \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (2.3.4.2)$$

түріндегі шекаралық шартымен берілген (2.3.1.1), (2.3.1.2) есепті аламыз.

Сол сияқты 3-і, 4-і, ..., $(m+1)$ -і эталондық есепті таңдаймыз. $(m+1)$ -і эталондық есеп ретінде (2.3.1.1), (2.3.1.2), (2.3.1.3) берілген есепке эквивалент болатын (2.3.1.1), (2.3.1.2), (2.3.3.2) есептерін аламыз.

Шекаралық шарттарды қалпына келтіру есебінің тұжырымы. 1-есеп: берілген (2.3.1.1) дифференциалдық теңдеу және бірінші эталондық есептің спектрі бойынша бірінші шекаралық векторлық функциясын $\{\rho_k^{(1)}(t), \quad k = 1, \dots, m+1\}$ бірмәнді түрде қалпына келтіру қажет. 2-кері есеп: берілген (2.3.1.1) дифференциалдық теңдеу және анықталған $\{\rho_k^{(1)}(t), \quad k = 1, \dots, m+1\}$ шекаралық

векторлық функция және екінші эталондық есептің спектрі бойынша екінші шекаралық векторлық функциясын $\{\rho_k^{(2)}(t), k = 1, \dots, m+1\}$ бірімәнді түрде қалпына келтіру қажет. Сол сияқты, 3-, 4-, ..., m -кері есептер қойылады. $m + 1$ -кері есеп: берілген (2.3.1.1) дифференциалдық теңдеу және анықталған $\{\rho_k^{(1)}(t)\}, \dots, \{\rho_k^{(m)}(t)\}, k = 1, \dots, m+1$ шекаралық векторлық функциялар және $m + 1$ -эталондық есептің спектрі бойынша $m + 1$ -шекаралық векторлық функциясын $\{\rho_k^{(m+1)}(t), k = 1, \dots, m+1\}$ бірімәнді түрде қалпына келтіру қажет. Негізінде, эталондық есептің барлық спектрі емес, тек оның ақырлы бөлігі ғана пайдаланылады. Келесі бөлімде жоғарыда айтылған тұжырымдар толығырақ қарастырылады.

2.3.5. Шекаралық функцияларды қалпына келтіруге арналған теорема.

(2.3.1.3) шектік шарттан оған эквивалентті канондық шекаралық формаларға көшу келесі түрдегі шекаралық векторлық функцияларды $\{\rho_k^{(m+1)}(t), k = 1, \dots, m+1\}, \dots, \{\rho_k^{(1)}(t), k = 1, \dots, m+1\}$ қалпына келтіру теоремасын дәлелдеуге мүмкіндік береді. Әрі қарай s -эталондық есепті E_s есебі деп атайтын боламыз. Бірдей (2.3.1.1) теңдеуі бар, бірақ шекаралық шарттарда (2.3.1.2) параметрлері әртүрлі E_s типті есепті \widetilde{E}_s арқылы белгілейік. Барлық жерде белгілі бір таңба E_s есебіне қатысты нысанды белгілейтін болса, онда жоғарғы жағындағы «толқыны» бар бірдей таңба \widetilde{E}_s есебіне қатысты нысанды білдіреді.

Теорема 2.3.4. $\{1, \dots, m + 1\}$ жиынында бүтін s -ті бекітейік. E_s және \widetilde{E}_s есептерінің спектрлері бірдей болсын. Егер $L_2(\Gamma)$ де $\rho_k^{(1)}(t) = \tilde{\rho}_k^{(1)}(t), \dots, \tilde{\rho}_k^{(s-1)}(t) = \tilde{\rho}_k^{(s-1)}(t), k = 1, \dots, m+1$ тең, E_s және \widetilde{E}_s есептерінің түбірлік функциялар жүйесі $L_2(\Gamma)$ де толық болса, онда $L_2(\Gamma)$ де $\rho_k^{(s)}(t) = \tilde{\rho}_k^{(s)}(t)$ болады.

Γ графында Лебег өлшемі мен метрикалық топология [8] енгізейік. $L_2(\Gamma)$ кеңістігі осы өлшемге қатысты L_2 кеңістігі ретінде түсініледі. Басқаша айтқанда, $L_2(\Gamma)$ кеңістігінде төмендегі формуламен анықталатын скаляр көбейтіндіні енгіземіз

$$(y, z) = \sum_{j=1}^{m+1} (y_j, z_j) = \sum_{j=1}^{m+1} \int_0^{b_j} y_j(x_j) \overline{z_j(x_j)} dx_j, \quad y, z \in L_2(\Gamma) \quad (2.3.5.1)$$

Онда, (2.3.3.10) шарт (2.3.5.1) формула бойынша келесі түрге көшеді

$$\begin{cases} y_{m+1}(0)+ \langle \rho^{(1)}, f \rangle = 0, \\ y'_{m+1}(0)+ \langle \rho^{(2)}, f \rangle = 0, \\ y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) + \langle \rho^{(j+2)}, f \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, m-1. \end{cases}$$

мұндағы

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} &= (\rho_1^{(1)}, \dots, \rho_{m+1}^{(j)}) \in L_2(\Gamma), \\ f &= (f_1, \dots, f_{m+1}) \in L_2(\Gamma). \end{aligned}$$

$f_j(t) = -y''_j(t) + p_j(t)y_j(t), \quad j = 1, \dots, m+1$ ескеріп, енгізілген белгілер бойынша

$$\begin{cases} W_0(y) = y_{m+1}(0) + \langle \rho^{(1)}, -y'' + py \rangle, \\ W_1(y) = y'_{m+1}(0) + \langle \rho^{(2)}, -y'' + py \rangle, \\ W_{j+1}(y) = y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) + \langle \rho^{(j+2)}, -y'' + py \rangle, \\ j = 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (2.3.5.2)$$

аламыз. Осылардан $py = (p_1 y_1, p_2 y_2, \dots, p_{m+1} y_{m+1})$ екенін байқаймыз.

$s = 1$ болған жағдайдағы 2.3.4 теореманың дәлелі. $u^{(1)} = (u_1^{(1)}(x_1), u_2^{(1)}(x_2), \dots, u_{m+1}^{(1)}(x_{m+1}))$ арқылы төмендегі Коши есебінің шешімін белгілейік

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx_j^2} u_j^{(1)}(x_j) + p_j(x_j) u_j(x_j) &= \lambda u_j(x_j), \quad x_j \in (0, b_j), \quad j = 1, \dots, m+1 \\ u_{m+1}^{(1)}(0) = 1, \quad \frac{du_{m+1}^{(1)}}{dx_{m+1}}(0) = 0, \quad \left. \frac{du_k^{(1)}(x_k)}{dx_k} \right|_{x_k=0} - A_k \left. \frac{du_{m+1}^{(1)}(x_{m+1})}{dx_{m+1}} \right|_{x_{m+1}=b_{m+1}} &= 0, \quad k = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

$u_j^{(1)}(x_j, \lambda)$ функциясы λ параметріне үшін бүтін функциялар екенін байқаймыз. Өйткені, 2.3.1 теорема бойынша барлық комплекс λ үшін Коши есебі бірімәнді шешіледі. $\lambda = \lambda^{(1)} \in E_1$ есебінің меншікті мәні болсын. Онда $u^{(1)}(\lambda^{(1)}) = (u_1^{(1)}(x_1, \lambda^{(1)}), u_2^{(1)}(x_2, \lambda^{(1)}), \dots, u_{m+1}^{(1)}(x_{m+1}, \lambda^{(1)}))$ функциясы $\lambda^{(1)}$ өзіндік мәніне сәйкес, E_1 есебінің өзіндік функциясы. E_1 есебінің бірінші шекаралық шарты келесі түрде болады

$$W_0(u^{(1)}(\lambda^{(1)})) = u_{m+1}^{(1)}(0, \lambda^{(1)}) + \lambda^{(1)} \langle \rho^{(1)}, u^{(1)}(\lambda^{(1)}) \rangle = 0$$

осыдан

$$\langle \rho^{(1)}, u^{(1)}(\lambda^{(1)}) \rangle = -\frac{1}{\lambda^{(1)}}.$$

Демек, E_1 есебінің меншікті мәндері Фурье функциясының коэффициенттерін, $\rho^{(1)} \in E_1$ есебіне түйіндес түбірлік функциялар жүйесі арқылы анықталады. E_1 есебінің түбірлік функциялар жүйесі $L_2(\Gamma)$ кеңістігінде толық болғандықтан, түйіндес есептің түбірлік функциялар жүйесі $L_2(\Gamma)$ де толық. Егер E_s және \tilde{E}_s есептерінің спектрлері сәйкес келсе, онда $\rho^{(1)}$ және $\tilde{\rho}^{(1)}$ функциялардың Фурье коэффициенттері $L_2(\Gamma)$ кеңістігінің бір толық жүйесінде сәйкес келеді. Демек, $L_2(\Gamma)$ кеңістігінде $\rho^{(1)}$ және $\tilde{\rho}^{(1)}$ функциялары сәйкес келеді. Бұл дәлелдеу E_1 және \tilde{E}_1 есептерінің қарапайым меншікті мәндерінің жағдайына сәйкес келеді. Еселі меншікті мәндер болған жағдайда пайымдау аздап өзгертуді қажет етеді. $s = 2$ болған жағдайдағы 2.3.4 теореманың дәлелі. $u^{(2)} = (u_1^{(2)}(x_1), u_2^{(2)}(x_2), \dots, u_{m+1}^{(2)}(x_{m+1}))$ арқылы төмендегі Коши есебінің шешімін белгілейік

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx_j^2} u_j^{(1)}(x_j) + p_j(x_j) u_j(x_j) &= \lambda u_j(x_j), \quad x_j \in (0, b_j), \quad j = 1, \dots, m+1, \\ W_0(u^{(2)}) = 0, \quad \frac{du_{m+1}^{(1)}}{dx_{m+1}}(0) = 1, \quad \left. \frac{du_k^{(1)}(x_k)}{dx_k} \right|_{x_k=0} - A_k \left. \frac{du_{m+1}^{(1)}(x_{m+1})}{dx_{m+1}} \right|_{x_{m+1}=b_{m+1}} &= 0, \quad k = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

$\lambda = \lambda^{(2)} \in E_2$ есебінің меншікті мәні болсын. Онда, $u^{(2)}(\lambda^{(2)}) = (u_1^{(2)}(x_1, \lambda^{(2)}), u_2^{(2)}(x_2, \lambda^{(2)}), \dots, u_{m+1}^{(2)}(x_{m+1}, \lambda^{(2)}))$ функциясы $\lambda^{(2)}$ меншікті мәніне

сәйкес, E_2 есебінің меншікті функциясы болады. E_2 есебінің екінші шекаралық шарты келесі түрде болады

$$W_1(u^{(2)}(\lambda^{(2)})) = \frac{d}{dx_{m+1}} u_{m+1}^{(2)}(x_{m+1}, \lambda^{(2)}) \Big|_{x_{m+1}=0} + \lambda^{(2)} < \rho^{(2)}, u^{(2)}(\lambda^{(2)}) > = 0,$$

осыдан

$$< \rho^{(2)}, u^{(2)}(\lambda^{(2)}) > = -\frac{1}{\lambda^{(2)}}.$$

Келесі пайымдаулар $s = 1$ үшін 2.3.4-теореманың дәлелдеуін қайталайды. E_1 және E_2 есептерінде ортақ меншікті мәндер болған жағдайда, дәлелдеуді аздап өзгерту қажет. Басқа s үшін 2.3.4-теореманың дәлелдері ұқсас. 2.3.4-теорема толығымен дәлелденді.

2.3.6. Шектік есептер жағдайында бірегейлік теоремасын нақтылау.

Бұл бөлімде шекаралық есептер үшін 2.3.4-теореманы нақтылаймыз. Осы параграфта $\rho_k^{(j)}(x_k)$ функцияларын $j, k = 1, \dots, m+1$ болғандағы $\{U_i^k(c_k), U_i^k(s_k), k = 1, \dots, m+1, i = 1, \dots, m\}$ шекаралық пішіндерінің мәндерімен байланыстыратын формулалар (2.3.3.1) берілген. (2.3.3.1) формуладан барлық $j = 1, \dots, m+1$ болғандағы $\rho_k^{(j)}(x_k)$ функциялары $-y_k''(x_k) + p_k(x_k)y(x_k) = 0, k = 1, \dots, m+1$ біртекті теңдеуінің шешімдері болатыны шығады. $p_1(x_1), \dots, p_{m+1}(x_{m+1})$ коэффициенттері берілгендіктен, $\{c_k(x_k), s_k(x_k), k = 1, \dots, m+1\}$ шешімдері де белгілі. $\{1, \dots, m+1\}$ жиынынан j -ді бекітеміз. Белгісіз тұрақтылары $h_{1k}^{(j)}, h_{2k}^{(j)}$ үшін

$$\rho_k^{(j)}(x_k) = h_{1k}^{(j)}c_k(x_k) + h_{2k}^{(j)}s_k(x_k), x_k \in (0, b_k), k = 1, \dots, m+1$$

болсын. Осы параграфтың 5-бөлімінде $\rho^{(j)} = (\rho_1^{(j)}(x_1), \dots, \rho_{m+1}^{(j)}(x_{m+1}))$ шекаралық функцияның Фурье коэффициенттері мен E_j есебінің меншікті мәндері арасындағы байланыс берілген.

$$< \rho^{(j)}, u^{(j)}(\lambda^{(j)}) > = -\frac{1}{\lambda^{(j)}}$$

екенін еске алайық. Мұндағы $u^{(j)}(\lambda^{(j)}) - \lambda^{(j)}$ меншікті мәніне сәйкес келетін E_j есептің меншікті функциясы.

Сондықтан $h_{11}^{(j)}, h_{12}^{(j)}, h_{1m+1}^{(j)}, h_{21}^{(j)}, \dots, h_{2m+1}^{(j)}$ белгісіз тұрақтылар үшін төмендегідей теңдеулер жүйесін аламыз

$$\sum_{k=1}^{m+1} \left(h_{1k}^{(j)} \int_0^b c_k(x_k) \bar{u}_k^{(j)}(x_k, \lambda^{(j)}) + h_{2k}^{(j)} \int_0^b s_k(x_k) \bar{u}_k^{(j)}(x_k, \lambda^{(j)}) \right) = -\frac{1}{\lambda^{(j)}}$$

Сонымен, белгісіз $h_{11}^{(j)}, h_{12}^{(j)}, h_{1m+1}^{(j)}, h_{21}^{(j)}, \dots, h_{2m+1}^{(j)}$ тұрақтыларды бірмәнді анықтау үшін

$$Z = \begin{vmatrix} \int_0^{b_1} c_1(x_1) \bar{u}_1^j(x_1, \lambda_1^{(j)}) dx_1 \dots \int_0^{b_{m+1}} c_{m+1}(x_{m+1}) \bar{u}_{m+1}^j(x_{m+1}, \lambda_1^{(j)}) dx_{m+1} \dots \int_0^{b_1} s_1(x_1) \bar{u}_1^j(x_1, \lambda_1^{(j)}) dx_1 \dots \int_0^{b_{m+1}} s_{m+1}(x_{m+1}) \bar{u}_{m+1}^j(x_{m+1}, \lambda_1^{(j)}) dx_{m+1} \\ \dots \\ \int_0^{b_1} c_1(x_1) \bar{u}_1^j(x_1, \lambda_{2m+2}^{(j)}) dx_1 \dots \int_0^{b_{m+1}} c_{m+1}(x_{m+1}) \bar{u}_{m+1}^j(x_{m+1}, \lambda_{2m+2}^{(j)}) dx_{m+1} \dots \int_0^{b_1} s_1(x_1) \bar{u}_1^j(x_1, \lambda_{2m+2}^{(j)}) dx_1 \dots \int_0^{b_{m+1}} s_{m+1}(x_{m+1}) \bar{u}_{m+1}^j(x_{m+1}, \lambda_{2m+2}^{(j)}) dx_{m+1} \end{vmatrix}$$

анықтауыш нөлден өзгеше болатындай E_j -есептің $\{\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \dots, \lambda_{2m+2}^{(j)}\}$ меншікті мәндерін таңдау жеткілікті. Мұнда $u^{(j)}(\lambda_1^{(j)}), \dots, u^{(j)}(\lambda_{2m+2}^{(j)})$ - таңдалған меншікті мәндерге сәйкес келетін E_j -есептің меншікті функциялары.

Лемма 2.3.1. $b_1 = b_2 = \dots = b_{m+1} = b$ болсын. $p_1(x), \dots, p_{m+1}(x)$ дифференциалдық өрнектердің коэффициенттері $\{c_1(x), s_1(x), c_2(x), s_2(x), \dots, c_{m+1}(x), s_{m+1}(x)\}$ функциялар жүйесі $[0, b]$ кесіндісінде сызықты тәуелсіз болатындай етіп таңдап алайық. E_j есептің шексіз көп меншікті мәндері болсын. E_j есептің меншікті мәндерінің $\{\lambda_n^{(j)}, n = n_1, \dots, n_{2m+2}\}$ жиыны бар, олардың анықтауышы

$$Z = \begin{vmatrix} \int_0^{b_1} c_1(x_1) \bar{u}_1^j(x_1, \lambda_1^{(j)}) dx_1 \dots \int_0^{b_{m+1}} c_{m+1}(x_{m+1}) \bar{u}_{m+1}^j(x_{m+1}, \lambda_1^{(j)}) dx_{m+1} \dots \int_0^{b_1} s_1(x_1) \bar{u}_1^j(x_1, \lambda_1^{(j)}) dx_1 \dots \int_0^{b_{m+1}} s_{m+1}(x_{m+1}) \bar{u}_{m+1}^j(x_{m+1}, \lambda_1^{(j)}) dx_{m+1} \\ \dots \\ \int_0^{b_1} c_1(x_1) \bar{u}_1^j(x_1, \lambda_{2m+2}^{(j)}) dx_1 \dots \int_0^{b_{m+1}} c_{m+1}(x_{m+1}) \bar{u}_{m+1}^j(x_{m+1}, \lambda_{2m+2}^{(j)}) dx_{m+1} \dots \int_0^{b_1} s_1(x_1) \bar{u}_1^j(x_1, \lambda_{2m+2}^{(j)}) dx_1 \dots \int_0^{b_{m+1}} s_{m+1}(x_{m+1}) \bar{u}_{m+1}^j(x_{m+1}, \lambda_{2m+2}^{(j)}) dx_{m+1} \end{vmatrix}$$

нөлден өзгеше. Мұнда $\lambda_1^{(j)} = \lambda_{n_1}^{(j)}, \dots, \lambda_{n_{2m+2}}^{(j)} = \lambda_{n_{2m+2}}^{(\rho)} - E_j$ эталонды есептің кейбір меншікті мәндері.

Лемма 2.3.1 дәлелдеу. Кері болжам: кез келген жиынтық $\{\lambda_n^{(j)}, n = n_1, \dots, n_{2m+2}\}$ үшін анықтауыш $Z = 0$ $n_1 = 1, \dots, n_{2m+1} = 2m + 1$ болсын. E_j есептің шексіз көп меншікті мәндері болғандықтан, $\lambda_n^{(j)}, n = n_{2m+2} - E_j$ есептің барлық спектрі арқылы орындалсын. $Z = 0$ болғандықтан, $Z \vec{h} = 0$ біртекті сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі, $\vec{h} = [h_{11}^{(j)}, \dots, h_{1m+1}^{(j)} \quad h_{21}^{(j)}, \dots, h_{2m+1}^{(j)}]$ болғанда нөлдік емес шешімі бар. $h_{11}^{(j)} \neq 0$ деп есептейік. Демек, $c_1(x)$ функциясының Фурье коэффициенттері $\{s_1(x), c_2(x), s_2(x), \dots, c_{m+1}(x), s_{m+1}(x)\}$ функцияларының Фурье коэффициенттері арқылы сызықты түрде өрнектеледі.

Егер $c_1(x)$ функциясының барлық Фурье коэффициенттері $\{s_1(x), c_2(x), s_2(x), \dots, c_{m+1}(x), s_{m+1}(x)\}$ функцияларының Фурье коэффициенттері арқылы сызықты түрде өрнектелсе, онда $\{c_1(x), s_1(x), c_2(x), s_2(x), \dots, c_{m+1}(x), s_{m+1}(x)\}$ функциялар жүйесі сызықты тәуелді жүйе болып табылады. Соңғысы оның таңдауына қайшы келеді. Егер $h_{11}^{(j)} \neq 0$ орындалмаса, дәлелдеуге кейбір өзгертулер енгізу қажет.

Теорема 2.3.5. $\{1, \dots, m+1\}$ жиынынан j түзетеміз. $b_1 = b_2 = \dots = b_{m+1} = b$ болсын. Дифференциалдық өрнектердің $p_1(x), \dots, p_{m+1}(x)$ коэффициенттері $\{c_1(x), s_1(x), c_2(x), s_2(x), \dots, c_{m+1}(x), s_{m+1}(x)\}$ функциялар жүйесі $[0, b]$ кесіндісінде сызықтық тәуелсіз болатындай етіп таңдалған деп алайық. E_j және \tilde{E}_j есептердің 1-леммадан алынған меншікті мәндердің соңғы жиындары сәйкес болсын. $\rho^{(1)} = \tilde{\rho}^{(1)}, \dots, \rho^{(j-1)} = \tilde{\rho}^{(j-1)}$ саны $L_2(\Gamma)$ болса, $\rho^{(j)} = \tilde{\rho}^{(j)}$ саны $L_2(\Gamma)$ болады.

Теорема 2.3.4 дәлелдеуде сәйкес меншікті мәндер сәйкес келсе, E_j және \tilde{E}_j меншікті функциялар сәйкес келетіні анықталды. Бұл факт 5-теореманы

дәлелдеуде маңызды рөл атқарады. Қорытындылай келе, мұнда келтірілген кейбір конструкцияларды [49–54] жұмыстарынан табуға болатынын атап өтеміз.

ҚОРЫТЫНДЫ

Бұл диссертациялық жұмыста акустикалық диагностиканың математикалық моделдері тақырыбын зерттеу барысында өзара байланысқан стерженьдер мен құбырлардан құралған конструкцияның бекіту түрлеріне диагностика жасау қарастырылған. Бұл жұмыста конструкцияның жеке бөлшектерінің тербеліс жиілігіне қарай бекіту түрлері анықталды. Бұл диссертациялық жұмыста бірқатар математикалық нәтижелер алынған. Олардың көбі стерженьдердің немесе құбырдың шеттік бекітулерінде ақау қалай басталады және одан кейін олар ары қарай қандай сценариимен дамитыны ұсынылған. Ұсынылған сценарииге байланысты стерженьнің шеттік бекітуінің күйін анықтауға математикалық модельдер көрсетілген және одан кейін олар мұқият зерттелген.

Диссертациялық жұмыста келесідей негізгі нәтижелер алынды:

1. Стерженьдер мен құбырлар тұратын құрылғылардың бекітулерінде ақаудың қалай пайда бола бастайтыны мен одан кейін қандай сценариимен дамитынын ұсынылды;
2. Жоғарыда аталған сценарииден туындайтын математикалық есептерді зерттелді;
3. Математикалық зерттеулердің нәтижелері бойынша практикалық ұсыныстар жасалынды.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
2. Бухтияров И.Д., Аллилуев В.А. Исследования по акустической диагностике цилиндропоршневой системы ДВС // Труды СибВИМа. – Новосибирск, 1968. – Вып. 4. – С. 378–879.
3. Диагностика автотракторных двигателей / Под ред. Н.С. Ждановского. – Л.: Колос, 1977. — 264 с.
4. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. – М.: Наука, 1979. – 295 с.
5. Биргер И.А. Техническая диагностика. – М.: Машиностроение, 1978. – 239 с.
6. Павлов Б.В. Акустическая диагностика механизмов. – М.: Машиностроение, 1971. – 223 с.
7. Кас М. Can one hear the shape of a drum? // Amer. Math. Monthly. –1966. – V. 73, №4. – P. 1–23.
8. Qunli W.U., Fricke F. Determination of the size of an object and its location in a cavity by eigenfrequency shifts // Nat. Conf. Publ. Inst. Eng. Austral. – 1990. – №9. – P. 329–333.
9. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.
10. Frikha S., Coffignal G., Trolle J. L. Boundary condition identification using condensation and inversion // J. Sound and Vib. – 2000. – V. 233, №3. – P. 495–514.
11. Frikha S., Gaudin M., Coffignal G. Boundary condition error for parametric updating of In-operation systems application to piping systems // J. Sound and Vib. – 2001. – V. 241, №3. – P. 373–399.
12. Тукмаков А.Л., Аксенов И.Б. О распознавании объектов на основе анализа акустического отклика при помощи функции числа состояний динамической системы // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2003. – №1. – С. 62–67.
13. Тукмаков А.Л., Аксенов И.Б. Идентификация объектов на основе анализа функции числа состояний акустического отклика // Журн. техн. физики. – 2003. – Т. 73, вып. 10. – С. 130–133.
14. Оглезнева Л.А., Калиниченко А.Н. Акустические методы контроля и диагностики. Часть II. Издательство Томского политехнического университета 2009. – 292 с.
15. Звонарев С. В. Основы математического моделирования. Екатеринбург Издательство Уральского университета. 2019. – 112 с.
16. Назаров С.А. Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ, 7:5 (1995), С. 1–92; St. Petersburg Math. J., 7:5 (1996), P. 681–748
17. Козлова М.В. Осреднение трехмерной задачи упругости для тонкого неоднородного бруса. // Вестник МГУ. Серия матем. мех. 1989. №5. С. 5-10.

18. Козлова М.В., Панасенко Г.П. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородном стержне// Журнал вычислительной математики и математической физики, 1991, Т. 31, № 10, С. 1592–1596
19. Panasenko G.P. Asymptotic analysis of bar systems. // Russian Journal of Mathematical Physics 4, 1994.
20. Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B. Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. // Birkhauser. 2000, Vol 2, No.1. http://doi:10.1007/978-3-0348-8432-7_7.
21. Назаров С.А. Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки., Т. 1, Научн. книга, Новосибирск, 2002, 408 с.
22. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
23. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
24. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). – М.: Наука, 1968. – 503 с.
25. Постников М.М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1979. – 312 с.
26. Carolyn S. Gordon and David L. Web Isospectral convex domains in the hyperbolic plane// Proceeding of the American Mathematical Society Volume 120, Number 3, March 1994. P. 981-983.
27. Кас М. Can one hear the shape of a drum? Amer. Math. Monthly 73 (1966), 1-23
28. Naymark M.A., "Linear Differential Operators". – М.: Nauka, 1969, 528 p.
29. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. – Мир, Москва, 1968, 750 с.
30. Гантмахер Ф.Р. Теория Матриц. – Наука, Москва, 1988, 549 с.
31. Юрко В.А. “Восстановление дифференциальных операторов переменных порядков на звездообразном графе по спектрам” // Дифференц. уравнения, 49:12 (2013), С. 1537–1548; англ. пер.: Yurko V.A., Recovering variable order differential operators on star-type graphs from spectra // Differ. Equ., 49:12 (2013), P. 1490–1501.
32. Yurko V. Inverse problems for differential operators of variable orders on star-type graphs: general case // Anal. Math. Phys., 4:3 (2014), P. 247–262.
33. Bondarenko N. Inverse problems for the differential operator on the graph with a cycle with different orders on different edges // Tamkang J. Math., 46:3 (2015), P. 229–243.
34. Игнатьев М.Ю. Единственность восстановления дифференциального оператора переменного порядка на простейшем некомпактном графе с циклом // Изв. Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2014, Т. 14, №4(2), С. 542–549. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-4-542-549>
35. Игнатьев М.Ю. Единственность решения обратной задачи рассеяния

для дифференциального уравнения переменного порядка на простейшем некомпактном графе с циклом // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 14:4(2) (2014), С. 542–549.

36. Жапсарбаева Л.К., Кангузин Б.Е., Кошкарбаев Н. Об асимптотике по спектральному параметру решений дифференциальных уравнений на дереве с условиями кирхгофа в его внутренних вершинах // Математический журнал. – 2017. – Т. 17, №4(66). – С. 37-50.

37. Zhapsarbaeva L.K., Kanguzhin B.E., Seitova A.A. Asymptotics of the eigenvalues of the double differentiation operator with Birkhoff-regular boundary conditions on a star graph // Matematicheskiy zhurnal Vol. 18, No.2 (68), 2018, P. 107–124.

38. Zhapsarbaeva L.K., Kanguzhin B.E., Madibaiuly Zh. Lagrange formula for differential operators and self-adjoint restrictions of the maximal operator on a tree // Eurasian mathematical journal, Vol. 10, No. 1 (2019), P. 16–29.

39. Afanaseva N.A., Bulot L.P., Electrical Engineering and Electronics // SPb.: SPbGUN I P.T., Uchebnoe posobie (2010), 181 p.

40. Бондаренко Н.П. -Дискретные математические модели: Учеб. пособие для студ. матем. спец. Саратов, 2015. – 52 с.

41. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillshen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte // Acta Math. 1945, No. 78, P. 1–96. <https://doi:10.1007/BF02421600>.

42. Levitan B.M., Gasymov M.G. Determination of a differential equation by two of its spectra // Russian Mathematical Surveys, 1964, Vol. 19, No. 2, P. 1–63. <https://doi:10.1070/rm1964v019n02abeh001145>.

43. Plaksina O.A. Inverse problems of spectral analysis for sturm-liouville operators with nonseparated boundary conditions. II // Math. of the USSR-Sbornik., Vol. 64(1): 141, P. 1–23. <https://doi:10.1070/sm1989v064n01abeh003299>.

44. Yurko V. Inverse problems for differential pencils on A-graphs // J. Inverse Ill-Posed Probl. Vol. 25, No. 6, 2017, P. 819–828. <https://doi:10.1515/jiip-2016-0065>.

45. Kanguzhin B.E., Dairbaeva G.; Madibaiuly Zh. Uniqueness of the restoration of boundary conditions differential operator on a set of spectra // J. Math. Mech. Comp. Sci. 2019, Vol. 104, No. 4, P. 44–49. <https://doi:10.26577/JMMCS-2019-4-m5>.

46. Kanguzhin B.E., Dairbaeva G., Madibaiuly Zh. Identification of boundary conditions of a differential operator // J. Math. Mech. Comp. Sci. 2019, Vol. 103, No. 3, P. 82–93. <https://doi:10.26577/JMMCS-2019-3-m2>.

47. Kanguzhin B.E. Recovering of two-point boundary conditions by finite set of eigenvalues of boundary value problems for higher order differential equations // UFA Math. J., 2020, Vol. 12, No. 3, P. 22–29, <https://doi:10.13108/2020-12-3-22>.

48. Liu D.-Q., Yang, C.-F. Inverse spectral problems for Dirac operators on a star graph with mixed boundary conditions // Math. Methods Appl. Sci., 2021, Vol. 44, No. 13, P. 10663-10672. <https://doi:10.1002/mma.7436>.

49. Sadovnichii V., Sultanaev Y.T. Akhtyamov A. The inverse problem of recovering the coefficients of a differential equations on a graph // J. Inverse Ill-Posed Probl., 2020, Vol. 28, No. 5, P. 727–738, <https://doi:10.1515/jiip-2020-0070>.

50. Zhapsarbaeva L.K., Kanguzhin B.E., Seitova A.A. Asymptotics of the eigenvalues of the double differentiation operator with Birkhoff-regular boundary conditions on a star graph // *Mat. Zhurnal* 2018, Vol. 18, P. 107–124.
51. Ao S.I., Gelman L. *Electrical Engineering and Applied Computing* // Springer Science+Business Media: NY, USA, 2011, Vol. 90, <https://doi:10.1007/978-94-007-1192-1>.
52. Balakrishnan R., Ranganathan K.A. *Textbook of Graph Theory* // Springer Science+Business Media, NY, USA, 2012. <https://doi:10.1007/978-1-4614-4529-6>.
53. Sobolev A.V., Solomyak M. Schrodinger operators on homogeneous metric trees: spectrum in gaps // *Reviews in Mathematical Physics*, 2002, Vol. 14, No. 5, P. 421–467. <https://doi:10.1142/S0129055X02001235>.
54. Nurakhmetov D., Jumabayev S., Aniyarov A., Kussainov R. Symmetric Properties of Eigenvalues and Eigenfunctions of Uniform Beams // *Symmetry*, 2020, Vol. 12, No. 12, 13 p. <https://doi:10.3390/sym12122097>.
55. Kanguzhin B.E., Ghulam Hazrat A.R., Kaiyrbek Zh. Identification of the Domain of the Sturm–Liouville Operator on a Star Graph // *Symmetry*, 2021, Vol. 13, No. 7, 15 p. <https://doi.org/10.3390/sym13071210>.
56. Kanguzhin B.E., Akanbay Y.N., Kaiyrbek Zh. On the Uniqueness of the Recovery of the Domain of the Perturbed Laplace Operator // *Lobachevskii J. of Math.*, 2022, Vol. 43, P. 1532–1535. <https://doi.org/10.1134/S1995080222090116>
57. Kanguzhin B.E., Ghulam Hazrat A.R., Kaiyrbek Zh. Propagation of waves along the graph-star // *Kazakh Mathematical Journal*, 2021, Vol. 21. No. 2 P. 6-14.
58. Kaiyrbek Zh. Identification of the coefficients of equation for a vibrating rod in acoustic diagnostics // *J. of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, 2020, Vol. 106, No. 2, P. 50–57. <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v106.i2.05>.